Ueber den Luftwiderstand bei kleinen Geschwindigkeiten.

Von

Dr. **Hans Freiburg**.

I. Die Bestimmung des Luftwiderstandes, den schwingende Kreisscheiben erfahren.

In dem Jahresberichte der Königl. Realschule zu Augsburg aus dem Jahre 1883 veröffentlicht Herr Braun eine theoretische Arbeit über die „schwingende Bewegung einer kreisförmigen Scheibe im widerstehenden Mittel“. Die Abhandlung ist abgedruckt in Exner's Repertorium der Physik, 20. Band, pag. 771 ff. In dieser Arbeit berechnet der Verfasser, aufbauend auf den hydrodynamischen Differenzialgleichungen [1]) für sehr kleine Schwingungen

1) Die hydrodyn. Differenzialgleichungen lauten bekanntlich:

$$\varrho \frac{du}{dt} = \mu \Delta u - \frac{\partial p}{\partial x} + \varrho X$$

$$\varrho \frac{dv}{dt} = \mu \Delta v - \frac{\partial p}{\partial y} + \varrho Y$$

$$\varrho \frac{dw}{dt} = \mu \Delta w - \frac{\partial p}{\partial z} + \varrho Z$$

$$o = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

In diesen Gleichungen bezeichnen u, v, w die 3 Componenten der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitstheilchens, zerlegt nach den 3 rechtw. Coordinaten x, y, z; ϱ bezeichnet die Dichtigkeit, μ den Reibungscoefficienten, p den Druck der Flüssigkeit, X, Y, Z die von aussen auf sie einwirkenden Kräfte. Δ steht symbolisch für

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

(cfr. Crelle's Journal Bd. 59 (1861) pg. 229).

von geringer Geschwindigkeit den Widerstand, den in einer inkompressiblen Flüssigkeit eine dünne kreisförmige Scheibe erfährt, deren Mittelpunkt in ihrer Symmetrieaxe schwingt. Der Verfasser ist nun der Ansicht, dass seine Resultate auch auf kompressible, also luftförmige Körper anwendbar seien bei sehr kleinen Geschwindigkeiten, wo die auftretenden Dichtigkeitsveränderungen vor und hinter der Scheibe vernachlässigt werden könnten.

Für mehrere einfache Fälle sind die hydrodyn. Differenzialgleichungen schon früher integrirt worden: von Stokes[1]) und O. E. Meyer[2]) für den Fall einer in einer reibenden Flüssigkeit schwingenden Kugel, deren Mittelpunkt auf einer Graden sich bewegt, von Lampe[3]) für eine Kugel, die um einen vertikalen Durchmesser rotirend schwingt, von Helmholtz[4]) für eine solche Hohlkugel, von O. E. Meyer[5]) und Maxwell[6]) für Scheiben, die um ihre Axe drehende Schwingungen ausführen.

Im Anschluss an diese Arbeiten hat also Braun die Integration für den Fall durchgeführt, dass eine Scheibe in ihrer Axe schwingt.

Während nun die Resultate der zunächst genannten Untersuchungen die experimentelle Prüfung bei kleinen Geschwindigkeiten auch für die kompressible Luft im Allgemeinen bestanden haben, liegt eine Bestätigung der Anwendbarkeit der Braun'schen Formeln auf Schwingungen in Luft noch nicht vor. Da mir aber zwischen dem von Braun behandelten Falle und den übrigen Fällen ein wesentlicher Unterschied bei der Anwendung auf luftförmige Flüssigkeiten zu bestehen scheint (cfr. pag. 184), so habe ich im Folgenden unternommen, durch das Experiment

---

1) Transactions of the Cambr. phil. soc. vol. VIII. pg. 287 (1847).
2) Crelle's Journal Bd. 73 pg. 31 (1871).
3) Programm des städt. Gymn. zu Danzig (1866).
4) Wiener Sitzungsberichte Bd. 40 (1860).
5) Pogg. Ann. Bd. 113 (1861). Bd. 125 (1865).
6) Phil. Trans. (London) Bd. 156 pg. 249 (1866).

zu prüfen, ob die Entwicklungen Braun's auf Luft anwendbar sind.

Zu dem Zwecke habe ich die Dämpfung, welche in ihrer Axe schwingende Kreisscheiben in Folge des Luftwiderstandes erfahren, experimentell bestimmt und die gefundenen Werthe mit den von Braun theoretisch entwickelten (Formel 49) verglichen.

1. Beschreibung des angewandten Apparates.

Bisher hat man sich behufs Bestimmung des Luftwiderstandes bei kleinen Geschwindigkeiten gewöhnlich der Drehwage bedient. Man liess dieselbe schwingen und beobachtete die Dämpfung, welche die Wagebalken von Seiten der Luft erfuhren. Alsdann brachte man an beiden Seiten des Balkens die bezüglich des Luftwiderstandes zu untersuchenden Körper, z. B. Kugeln, Cylinder, Platten, an und beobachtete jetzt die stattfindende Dämpfung. Die Differenz zwischen dieser und der vorhin beobachteten Dämpfung wird als von dem untersuchten Körper allein herrührend betrachtet und aus ihr der Luftwiderstand, den der Körper für sich erfährt, berechnet. Diese Methode der Drehwage gestattet bei Anwendung der Spiegelablesung eine sehr genaue und bequeme Beobachtung. Jedoch ist sie, wie ich später zeigen werde, nicht geeignet, den reinen Luftwiderstand zu bestimmen.

Daher habe ich eine neue (von Herrn Professor Ketteler mir vorgeschlagene) Methode angewandt, deren Beschreibung ich hier folgen lasse:

Eine aus $^3/_4$ mm dickem Eisendraht bestehende Spirale, deren Länge 1,2 m und deren Durchmesser im Lichten 1 cm betrug, war mit ihrem einen Ende solid in der Zimmerdecke befestigt. An dem untern Ende trug sie ein kleines rundes Metall-Scheibchen mit einem halbmondförmigen Ausschnitt, dessen horizontal liegende Kante als Marke diente. In einer tiefer liegenden Oeffnung des Scheibchens waren drei dünne 32 cm lange Neusilberdrähte befestigt, an welchen die auf den Luftwiderstand zu untersuchende Scheibe in horizontaler Lage suspendirt war. Ein in einer feinen Oeffnung in der Mitte der Scheibe befestigter, 20 cm langer Draht trug eine 15 cm lange und 2,1 cm dicke, vertikal hängende Glasröhre, welche durch Einfüllen von Schrot eine beliebige Belastung gewinnen liess. Die Röhre war unten halbkugelförmig zugeblasen und oben mit einem ebenso geformten Wachsdeckel abgeschlossen, damit sie an ihren beiden Enden der Luft eine gleich gestaltete Oberfläche darböte.

Uebt man nun auf die Scheibe einen kurzen, senkrechten Druck aus, so wird der ganze Apparat in auf- und abpendelnde Schwingungen um seine Ruhelage gerathen, welche kleiner und kleiner werdend, schliesslich zu Ruhe kommen.

2. Theoretische Begründung des anzuwendenden Beobachtungsverfahrens.

Die vorhin geschilderte Bewegung vollzieht sich unter dem beständigen, gleichzeitigen Einwirken zweier Kräfte, nämlich der elastischen Kraft der Spirale und des auf sämmtliche schwingende Theile ausgeübten Widerstandes der Luft. Für sehr kleine Schwingungen, wie sie im Folgenden ausschliesslich auftreten werden, ist der Luftwiderstand jedes Oberflächenelementes der Geschwindigkeit desselben, und die elastische Kraft der Verschiebung aus der Ruhelage proportional.

Demnach haben wir, wenn wir mit ξ die Verrückung aus der Ruhelage bezeichnen (also die Geschwindigkeit mit $\frac{d\xi}{dt}$) für die vorliegende Schwingungsbewegung nach dem d'Alembert'schen Princip die Differenzialgleichung:

$$G\frac{d^2\xi}{dt^2} + H\frac{d\xi}{dt} + K\xi = 0.$$

Hier bedeutet G die gesammte zu bewegende Masse, H den gesammten Luftwiderstand bei der Geschwindigkeit 1, und K die elastische Kraft der Spirale.

Dividiren wir obige Gleichung durch G und setzen (nach dem Vorgange von Gauss [1]))

---

1) Gauss und Weber, Resultate aus den Beobachtungen des magn. Vereins im Jahre 1837 pg. 74.

$$(1)\ \frac{H}{G} = 2\,\alpha \text{ und } (2)\ \frac{K}{G} = \beta^2,$$

so nimmt sie die Gestalt an

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} + 2\,\alpha \frac{d \xi}{d t} + \beta^2 \xi = 0.$$

Das Integral dieser Differenzialgleichung ist bekanntlich

$$\xi = A e^{-\alpha t} \sin \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\,(t - t_0),$$

wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, A und t_0 die beiden Integrationsconstanten bedeuten.

Wir können $t_0 = o$ setzen, das will sagen, wir wählen die Zeit eines bestimmten Durchganges durch die Gleichgewichtslage als Anfang der Zeitrechnung. Dann wird

$$\xi = A e^{-\alpha t} \sin .\, t \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}.$$

ξ wird zu Null, d. h. es wird die Ruhelage passirt, wenn

$$\sin .\, t \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = 0,$$

also wenn

$$t \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = n\,\pi$$

wird.

Demnach werden zwei aufeinanderfolgende Durchgänge durch die Ruhelage charakterisirt durch die Gleichungen

$$t_1 \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = n\,\pi \text{ und}$$
$$t_2 \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = (n + 1)\,\pi.$$

Die dazwischen liegende Zeit, die sogen. einfache Schwingungsdauer ist also:

$$T^1 = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

Im Folgenden werden wir die ganze Schwingungsdauer $T = 2\,T^1$ angeben; dann ist

$$(3)\ T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

Die Grösse einer beliebigen Amplitude, d. h. des Maximalausschlages aus der Ruhelage zu einer bestimmten Zeitt wird offenbar gegeben durch die Gleichung:

$$\xi = A e^{-\alpha t}.$$

Bilden wir nun das Verhältniss zweier beliebigen Amplituden, etwa der zur Zeit t und zur Zeit t + n T, also nach n ganzen Schwingungen stattfindenden, so erhalten wir:

$$(4)\quad \frac{\xi_t}{\xi_{t+nT}} = \frac{A e^{-\alpha t}}{A e^{-\alpha(t+nT)}} = e^{n\alpha T}.$$

Daraus folgt:

$$\log \frac{\xi_t}{\xi_{t+nT}} = n\,\alpha\,T \log e$$

oder

$$(5)\quad \frac{\log \frac{\xi_t}{\xi_{t+nT}}}{n} = \alpha\,T \log e.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung stellt das sogen. logarithmische Dekrement pro Schwingung in brigg. Logarithmen dar.

Wenn wir dasselbe mit λ bezeichnen, so können wir schreiben:

$$(6)\quad \lambda = \frac{\log \xi_t - \log \xi_{t+nT}}{n}.$$

Für α ergiebt sich aus Gleichung (5) der Werth:

$$(7)\quad \alpha = \frac{1}{\log e} \cdot \frac{\lambda}{T} = 2{,}3026 \cdot \frac{\lambda}{T}.$$

Es repräsentirt demnach α das log. Dekrement in natürlichen Logarithmen und bezogen auf die Secunde. Setzen wir in Gleichung (7) für λ seinen Werth, so ergiebt sich:

$$(8)\quad \alpha = 2{,}3026\,\frac{\log \xi_t - \log \xi_{t+nT}}{nT}.$$

Zur Berechnung von α muss also die Grösse der Amplituden ξ_t und ξ_{t+nT}, ferner die Schwingungsdauer T und die zwischen den beiden Amplituden verflossene Anzahl (n) der ganzen Schwingungen bekannt sein.

Nun ist nach Gleichung (1):

$$H = 2\,G\,\alpha.$$

Wenn demnach α berechnet und G, die zu bewegende Masse, gegeben ist, so ist der Gesammt-Luftwiderstand H bestimmbar.

3. Das Beobachtungsverfahren bei meinem Apparate.

Die zur Berechnung von α nöthigen Grössen wurden bei meinem Apparate in der folgenden Weise bestimmt:

Ganz nahe vor dem erwähnten Metall-Scheibchen war ein in halbe Millimeter getheilter, 5 cm langer Maassstab, dessen Theilstriche auf Milchglas mit Tusche sehr fein gezogen waren, genau lotrecht angebracht und zwar war er an das vordere Ende eines von einem soliden Dreifuss getragenen, meterlangen hölzernen Armes angekittet. Mittelst eines in passender Entfernung aufgestellten Fernrohres wurde zunächst abgelesen, auf welchen Millimeterstrich die Marke des Apparates, also die scharfe horizontale Kante des halbmondförmigen Ausschnittes in dem Metall-Scheibchen, in der Ruhelage sich einstellte.

Bei einiger Uebung kann ich den Stand der Marke bis auf $^1/_{50}$ mm abschätzen.

Jetzt wurde die Scheibe in vertikale Schwingungen versetzt, indem ich mittelst eines Gummischlauches senkrecht gegen die Mitte der Scheibe durch Blasen einen sanften Luftstoss führte.

Waren die Schwingungen nach einiger Zeit hinreichend klein geworden, so begann ich unter Benutzung des Fernrohres die Beobachtung[1]).

---

1) Die Ablesung ist ziemlich anstrengend. Behufs Erzielung einer bequemeren Beobachtung habe ich die folgende Ablesungsmethode versucht.

Ein aus leichtem Holz hergestellter ungleicharmiger Hebel, der um eine aus einer scharfen Schneide bestehenden Axe beweglich war, trug an seinem kürzeren Arme einen Spiegel angekittet. Der andere, längere Arm lief vorn in eine Nadel aus, welche auf der horizontalen Kante des Messingscheibchens auflag.

In passender Entfernung war eine vertikale Scala aufgestellt, deren Spiegelbild mit einem Fernrohre beobachtet werden konnte.

Wurde nun der Apparat in auf- und abpendelnde Bewegung gesetzt, so übertrug sich dieselbe auf den Hebelarm mit Spiegel. Auf diese Weise war eine der gewöhnlichen Spiegelablesung ähnliche gewonnen.

Leider machte sich dabei ein Uebelstand so sehr bemerklich, dass ich von derselben abstand.

Wenn nämlich eine neue Scheibe eingeschaltet werden sollte, so musste bei meinem primitiven Arrangement der Hebel von seiner Unterlage herunter genommen werden, und war es nachher unmöglich, ihn genau in seine alte Lage zu bringen.

In der neuen Lage war aber die Reibung eine andere als in

Bei einem passenden Theilstrich anfangend, zählte ich die Schwingungen, die nöthig waren, dass die Amplituden um je einen Theilstrich abnahmen.

Gleichzeitig wurde an einem sogen. Chronographen, dessen Zeiger mittelst eines Drückers in einem beliebigen Moment freigelassen resp. festgehalten werden konnte, die Schwingungsdauer beobachtet; sie wurde als Mittel aus 50 bis 100 Schwingungen bestimmt.

Zu Ende des Versuches wurde die Ruhelage noch einmal abgelesen.

Auf diese Weise sind alle zur Berechnung von α gemäss Gleichung (8) nöthigen Daten gewonnen. Die Amplituden ξ_t und ξ_{t+nT} differirten in meinen Versuchen stets um $^1/_2$ mm.

Ihre absolute Grösse war gegeben durch den Abstand des betreffenden Millimeterstrichs von der Ruhelage.

Die Anzahl (n) der Schwingungen, die zwischen den um $^1/_2$ mm differirenden Amplituden lag, war gezählt, T war gleichzeitig beobachtet.

Mittelst der eben geschilderten Beobachtung erhält man offenbar die Dämpfung, respective den Luftwiderstand, den der ganze Apparat (also die Scheibe nebst Spirale, Marke, Glasröhre und Drähte) erfährt. Um den Widerstand, der auf die Scheibe für sich wirkt, zu gewinnen, muss man den Widerstand bestimmen, den der Apparat ohne Scheibe, bei sonst gleicher Anordnung schwingend, erleidet. Zu dem Zwecke schaltet man die Scheibe aus und ersetzt deren Gewicht durch Schrot, den man in die Glasröhre bringt. Dadurch wird die Schwingungsdauer nur wenig geändert, so dass man sie mit der vorhin beobachteten identifiziren darf, das Gewicht G ist auch unverändert, nur das log. Dekrement α, also auch H hat sich geändert. Nennen wir diese geänderten Grössen jetzt α^1 und H^1, so gilt die Gleichung:

$$1(a)\quad H^1 = 2\,G\,\alpha^1.$$

Der auf die Scheibe allein ausgeübte Luftwiderstand

---

der alten. Daher wurden die für die einzelnen Scheiben gewonnenen Zahlen nicht untereinander vergleichbar.

ist offenbar $= H - H^1$, d. h. gleich dem Widerstand des Apparates mit Scheibe, vermindert um den Widerstand des Apparates an sich. Für diese Differenz ergiebt sich aus den Gleichungen (1) und 1(a) der Werth

$$H - H^1 = 2\,G\,(\alpha - \alpha^1).$$

Dies ist also der auf die Scheibe bei der Geschwindigkeit 1 ausgeübte Gesammt-Widerstand. Um den auf die Einheit der Fläche bezogenen Widerstand, welcher der „specifische Widerstand" (ν) heissen mag, zu erhalten, hat man den Gesammt-Widerstand der Scheibe durch ihren Flächeninhalt (F) zu dividiren, also

$$(9)\quad \nu = \frac{2\,G\,(\alpha - \alpha^1)}{F}.$$

4. Die Berechnung der Grösse G.

G bezeichnet, wie schon bemerkt, die gesammte zu bewegende Masse. Es ist gleichgiltig, ob wir sie in dem absoluten oder dem konventionellen Maasssysteme ausdrücken. Wir wollen das absolute wählen. Es setzt sich G zusammen einmal aus dem die Spirale belastenden Gewicht, also dem Gewicht der Scheibe, der Glasröhre (eventl. mit Schrot), der Marke und der Drähte. Dasselbe betrug bei meinen Versuchen stets 495 Grm. Weiterhin aber muss man bedenken, dass auch die unteren Theile der Spirale belastend auf die oberen wirken, woraus sich ergiebt, dass auch noch ein gewisser Bruchtheil des Gewichts der Spirale in Rechnung zu bringen ist. Was die Grösse dieses Bruchtheils angeht, so habe ich eine einzige Angabe darüber gefunden bei Külp, Schule des Physikers pg. 247. Dort wird die Hälfte des Spiralengewichts vorgeschrieben.

Durch Versuche mit mehreren Spiralen stellte sich aber heraus, dass nicht die Hälfte, sondern etwa das Drittel in Betracht zu ziehen ist.

Die Entscheidung über diesen Punkt gewinnt man mittelst Formel (3):

$$T = \frac{2\,\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}.$$

Wenn man nämlich die unendlich kleine Grösse α^2 ge-

genüber β^2 vernachlässigt und berücksichtigt, dass nach Gleichung (2): $\beta^2 = \frac{K}{G}$ definirt war, so wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G}{K}}.$$

Die elastische Kraft K der Spirale wird gemessen durch die Verlängerung s, welche ein zugefügtes Gewicht P hervorbringt, und zwar ist K direct proportional der Gewichtszulage und umgekehrt der zugehörigen Verlängerung also

$$K = \frac{P}{s}.$$

Demnach wird, unter Beachtung, dass hier P im absoluten Maasssystem auszudrücken ist, dass also im Nenner noch die Acceleration g als Factor hinzutritt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{G \cdot s}{P \cdot g}}.$$

Diese Gestalt der Formel kann man zur genaueren Bestimmung des in Betracht zu ziehenden Theiles des Spiralengewichts in der Weise verwenden, dass man T, s P und g als gegeben und G als unbekannt ansieht. Für die zu den folgenden Versuchen benutzte Spirale sind die nachstehenden Werthe einzusetzen:

Es war $T = 1{,}966$ sec.,

die Verlängerung s pro 10 gr Zulage betrug 1,8024 cm (mittelst Kathetometer bestimmt),

g für Bonn = 981,179 cm.

Also

$$1{,}996 = 2\pi \sqrt{\frac{G.\ 1{,}8024}{10.\ 981{,}179}}$$

oder

$$G = \frac{1{,}996^2 \,.\, 10 \,.\, 981{,}179}{4\,\pi^2 \,.\, 1{,}8024} = 549{,}5 \text{ gr}.$$

Da nun 495 gr von der angewandten Belastung absorbirt werden, so bleibt als in Rechnung zu setzender Gewichtsantheil der Spirale: 54,5 gr. Das Gesammtgewicht derselben betrug 176 gr.

Man sieht, die berechnete Zahl erreicht noch nicht den dritten Theil des Spiralengewichts. In den folgenden Berechnungen wird G gleich 549,5 gr angenommen werden.

5. Vorsichtsmaassregeln bei den Versuchen.

Meine Beobachtungen fanden statt in einem gegen directes Sonnenlicht geschützten, nach Nordosten gelegenen Parterre-Zimmer des hiesigen physik. Instituts. Das Zimmer wurde wegen seiner constanten Temperatur gewählt, welche im Laufe eines Tages nur ausnahmsweise Schwankungen von einigen Zehntel Graden zeigte.

Eine solche Beständigkeit der Temperatur ist für die vorliegenden Beobachtungen nothwendig. Zunächst weil eine Temperatur-Aenderung eine Verlängerung resp. Verkürzung der Spirale und damit eine unliebsame Wanderung der Ruhelage bewirkt; dann aber besonders weil die im freien Zimmer stattfindenden Versuche durch die in Folge von Temperaturschwankungen hervorgerufenen Luftströmungen nicht unerheblich beeinflusst werden können. Ueber diesen letzten Punkt siehe Seite 191.

Es wurde davon Abstand genommen, den Apparat mit einem Kasten zu umgeben, wie es zum Schutze gegen Luftströmungen gewöhnlich geschieht. Denn einmal hat diese Schutzmaassregel nicht den gewünschten Erfolg, da auch im Kasten sich noch Luftströmungen bilden können[1]), und zum andern entsteht dabei eine neue Fehlerquelle, indem die Luftwellen, welche die Bewegung der Scheibe hervorruft, an den Wänden des Kastens reflektirt werden und alsdann die Dämpfung beeinflussen.

Was die Ablesung an der Scala angeht, so erfolgte dieselbe stets von einem oberhalb der Ruhelage gelegenen Theilstriche ab, nachdem durch Versuche festgestellt war, dass man identische Werthe für das Enddekrement erhielt, ob man von einem Theilstriche oberhalb oder unterhalb der Ruhelage ausgehend beobachtete.

---

1) Vergleiche Braun: „Die Abhängigkeit der Luftdämpfung von Temperaturschwankungen". Exner's Rep. Bd. 20 pg. 822.

6. Zwei vollständige Beispiele meiner Versuchsreihen.

Es möge mir gestattet sein, ehe ich die Resultate meiner Versuche mittheile, zur Illustrirung meiner Beobachtungs-Methode zwei vollständige, beliebig herausgegriffene Versuchsreihen vorzuführen.

Tab. I.

1. Juli 1886. Baromet. 765 mm. Thermom. 15,4° C. Schwingungen des Apparates mit einer Scheibe von 7,5 cm. Radius. Ruhelage zu Anfang des Versuches 16,47.

I. Ablesung am Maassstabe	II. Fortlauf. Zählung der Schwingungen	III. Anzahl (n) der Schw. während die Amplituden um $^1/_2$ mm abnehmen	IV. Grösse der Amplituden	V. log. Dekrement brigg. pro Schwingung
13	0	30	3,47 mm	0,00225
13,5	30	37	2,97	216
14	67	47	2,47	209
14,5	114	62	1,97	205
15	176	89	1,47	203
15,5	265	155	0,97	203
16	420		0,47	

Ruhelage zu Ende des Versuches 16,47.
Beobacht. Schwingungsdauer T = 2,000 sec.

Tab. II.

2. Juli. Barom. 766 mm. Thermom. 15,7° C.
Schwingungen des Apparates ohne Scheibe.
Ruhelage zu Anfang 16,90.

I.	II.	III.	IV.	V.
14	0	52	2,9	0,00158
14,5	52	65	2,4	156
15	117	86	1,9	154
15,5	203	125	1,4	153
16	328	230	0,9	153[1])
16,5	558		0,4	

1) Zur Beurtheilung der Genauigkeit der Beobachtung führe

Ruhelage zu Ende 16,90.

Beobacht. Schwingungsdauer T = 1,996.

Colonne II giebt diejenige Schwingung an, bei der die Marke auf den in Col. I angegebenen Millimeterstrich der Scala einspielte. Die Zahlen der Col. III ergeben sich durch Subtraction zweier aufeinanderfolgenden Zahlen der II. Colonne. Die unter IV notirten Amplituden findet man, indem man die zugehörige Zahl der Col. I von der Ruhelage subtrahirt. In V ist das logarithmische Dekrement brigg. pro Schwingung gegeben. Es ist die Differenz der Logarithmen je zweier aufeinanderfolgenden Zahlen der Col. IV, dividirt durch die zugehörige, in Col. III gegebene Anzahl (n) der Schwingung gemäss der Formel (6).

Man sieht, für sehr kleine Schwingungen werden die Dekremente constant. Nur diese constanten Enddekremente können wir bei der vorliegenden Untersuchung benutzen.

7. Die Resultate der Versuche.

In der umstehenden Tabelle stelle ich die Ergebnisse meiner Versuche mit kreisförmigen Scheiben zusammen. (Die Dicke der aus Zink bestehenden Scheiben betrug $^3/_4$ mm.)

Der Apparat ohne Scheibe hatte, wie Tab. II zeigt, das Enddekrement 0,00153. Diese Zahl möge λ^1 heissen. In Col. V ist die Differenz aus dem Enddekrement (λ) der bezügl. Scheibe und dem Dekrement des Apparates an sich (λ^1) gebildet. Col. VI enthält diese Differenz in natürlichen Logarithmen und pro Secunde umgerechnet, gemäss Formel (7) durch Multiplication mit 2,3026 und Division mit der zugehörigen Schwingungsdauer (T). Col. VII gibt den spec. Widerstand ν, berechnet nach Formel (9).

Wie ein Blick auf die umstehende Tabelle zeigt, wächst

---

ich die Enddekremente an, welche bei 3 weiteren gleichartigen Versuchen sich ergaben. Ich erhielt:

0,00152
0,00154
0,00153.

Tab. III.

	I. Flächen-Inhalt (F)	II. Umfang	III. Schwingungsdauer (T)	IV[1]). Beob. Enddekrement in brigg. log. pro Schwingung (λ)	V. $\lambda - \lambda^1$	VI. $\alpha - \alpha^1$	VII. ν
	qcm	cm	sec.				
Nr. 1. Scheibe vom Radius r = 7,5 cm	176,71	47,1	2,000	0,00203	0,00050	0,000575	0,003576
„ 2. „ r = 10 „	314,16	62,8	2,003	244	091	1046	3660
„ 3. „ r = 15 „	706,85	94,2	2,0175	366	213	2431	3780
„ 4. „ r = 17,9 „	1006,6	122,4	2,035	470	317	3587	3916
„ 5[2]). Scheibe Nr. 2 und 3 verbunden.	1021,01	157,0	2,023	453	300	3415	3675
„ 6[2]). 3 Scheiben vom Radius r = 4,2 cm verbunden.	166,26	79,1	2,000	199	046	0529	3497

1) Die Zahlen dieser Colonne sind Mittelwerthe aus durchschnittlich 4 Beobachtungsreihen.

2) Die Scheiben waren derart durch 3 dünne Drähte miteinander verbunden, dass sie in 30 cm Entfernung genau parallel und horizontal untereinander hingen.

der spec. Widerstand mit der Grösse der Scheiben. Wie erklärt sich diese Thatsache?

Da mit der Scheibengrösse zugleich der Umfang zunimmt, so wird das Wachsen des ν theilweise eine Folge der Randreibung sein, welche bei zunehmendem Umfange natürlich einen steigenden Beitrag zur Dämpfung liefert.

Dass aber die vermehrte Randreibung nicht die einzige Ursache ist, geht unzweifelhaft aus den folgenden vergleichenden Zusammenstellungen hervor. Die mit Nr. 5 bezeichnete Scheibencombination, welche nahe gleichen Flächeninhalt, aber einen grösseren Umfang hat als Scheibe Nr. 4, zeigt trotzdem einen geringeren Werth für ν. Während nun Nr. 4 eine einzige zusammenhängende Scheibenfläche darstellt, besteht Nr. 5 aus zwei getrennten kleineren Scheiben. Demnach muss der grössere Werth ν bei Nr. 4 durch die Annahme erklärt werden, dass der spec. Widerstand mit dem Flächeninhalt der Scheibe wächst.

Die Vergleichung der Scheiben Nr. 6 und Nr. 2 führt zu demselben Resultat. Obschon Nr. 6 einen beträchtlich grösseren Umfang hat als Nr. 2, so gehört zu der letzteren Scheibe doch ein höherer Werth für ν, weil sie eben einen grösseren Flächeninhalt hat.

Die Zusammenstellung der zuletzt genannten zwei Scheiben zeigt deutlich, dass die Zunahme des Flächeninhalts in viel stärkerem Grade erhöhend auf ν einwirkt als das Wachsen des Umfanges.

Es darf demnach als feststehend ausgesprochen werden — spätere Versuche werden noch mehr Belege bringen —, dass der spec. Widerstand, abgesehen von dem Einfluss der Randreibung, mit dem Flächeninhalt der Scheiben wächst.

8. Vergleichung der experimentell gefundenen Resultate mit den theoretischen Ergebnissen Braun's.

Das gewonnene Ergebniss meiner Versuche steht nicht im Einklange mit den theoretischen Resultaten Braun's. Er giebt (Formel 4) für das auf die Zeiteinheit bezogene nat. logarithmische Dekrement α die Formel:

$$\alpha = \frac{2\mu\sigma\pi r^2}{G + \frac{2\varrho\mu r^2}{\sigma}}$$

wo $\sigma = \sqrt{\frac{\pi \cdot \varrho}{T \cdot \mu}}$ ist und die übrigen Zeichen die schon früher angegebene Bedeutung haben.

Wie aus der Formel ersichtlich ist, wächst α, abgesehen von dem geringen Correctionsgliede im Nenner, in demselben Verhältniss wie der Flächeninhalt der Scheiben.

Die Resultate meiner Versuche fordern dagegen, dass α stärker wächst als die Scheibenfläche.

In der folgenden Tabelle habe ich die aus der obigen theoretischen Formel berechneten[1]) und die experimentell beobachteten Werthe des log. Dekrements zusammengestellt.

Tab. IV.

	I. ϱ	II. α berechnet	III. α beobachtet (das frühere $\alpha - \alpha^1$)	IV. Differenz zwischen beobacht. und berechnet α	V. ν berechnet aus den Zahlen unter II.
Scheibe Nr. 1	0,001230	0,000389	0,000575	+ 0,000186	0,002423
„ „ 2	1230	0692	1046	+ 0,000352	2421
„ „ 3	1230	1551	2431	+ 0,000880	2411
„ „ 4	1213	2182	3587	+ 0,001405	2382

Die Col. IV zeigt, dass sehr beträchtliche und zwar überall einseitige Differenzen zwischen dem beobachteten und dem berechneten logar. Dekrement bestehen, und dass sie mit der Grösse der Scheiben zunehmen.

Berechnet man unter Zugrundelegung der theoret. Werthe von α (Col. II) nach Formel (9) den spec. Widerstand ν, so ergeben sich die unter V zusammengestellten Zahlen. Dieselben nehmen mit wachsendem Scheibeninhalte ab, während die auf Grund des Experiments erhaltenen (Tab. III Col. VII) zunehmen.

---

1) Es ist zu beachten, dass die Luftreibungsconstante $\mu = 0,00019$ (gr^{1} cent. — ^{1} sec.$^{-1}$) zu nehmen ist, und dass ϱ, die Dichtigkeit der Luft, auf Wasser von 4° C. bezogen werden muss.

Zur Erklärung dieser Abweichungen zwischen Theorie und Praxis lassen sich neben dem Einflusse der Randreibung noch zwei Punkte anführen, welche Braun selbst hervorhebt. Einmal ist die von letzterem vollzogene Integration nur strenge giltig für den Fall einer unendlich grossen Scheibe (l. c. pg. 779).

Zweitens ist den Braun'schen Entwicklungen die Annahme immanent, dass dem nach allen Seiten freien und ungestörten Abfliessen der Lufttheilchen bei der Bewegung der Scheibe kein Hinderniss entgegenstehe (l. c. pg. 781).

Es ist aber offenbar, dass gerade diese letzte Annahme in Wirklichkeit nie erfüllt ist, selbst nicht bei geringer Bewegungsgeschwindigkeit, und dass daraus die Abweichungen zwischen Theorie und Praxis hauptsächlich resultiren.

Die Metallscheiben enthalten bekanntlich an ihrer Oberfläche eine sehr dünne Schicht verdichteten Gases. Weil nun die Lufttheilchen an dieser Flüssigkeitsschicht haften, so erfahren die vor der bewegten Scheibe seitwärts abfliessenden Moleküle eine Verzögerung ihrer Bewegung und zwar wird diese Stockung um so stärker stattfinden, je länger der Weg ist, den die Theilchen an der Scheibe entlang zurücklegen müssen, d. h. je grösser die Scheibe ist. Infolge dieses verzögerten Abströmens müssen sich Luftverdichtungen vor, und in entsprechender Weise Luftverdünnungen hinter der Scheibe bilden, welche also um so stärker sind, je grösser dieselbe ist. Mit Hülfe der Luftverdichtungen und Luftverdünnungen erklären sich die Resultate meiner Versuche von selbst.

Es erfahren nämlich die Scheiben, je grösser ihr Flächeninhalt ist, den Widerstand einer desto stärker verdichteten Luft; daher muss der specifische Widerstand mit der Scheibengrösse wachsen (wie es meine Versuche ergeben).

In der That, zieht man die Grenzfälle in Betracht, so ist die Richtigkeit dieses Satzes sofort einleuchtend.

Vor einer unendlich grossen schwingenden Scheibe muss nothwendig, da ein Abfliessen der Luft unmöglich ist, eine Verdichtung stattfinden, während bei einer unendlich kleinen Scheibe die Lufttheilchen mit Leichtigkeit ausweichen können, so dass eine Verdichtung ausgeschlossen ist.

Einer practisch brauchbaren theoretischen Untersuchung über in Luft schwingende Scheiben, die sich in der von uns angenommenen Weise bewegen, dürfen demnach nicht die Differenzialgleichungen für inkompressible Flüssigkeiten zu Grunde gelegt werden.

Dass diese Gleichungen für die Behandlung der Eingangs erwähnten ähnlichen Fälle ausreichen, kann nicht als Gegengrund angeführt werden, denn zwischen jenen Fällen und dem von uns in's Auge gefassten besteht eben der Unterschied, dass dort Luftverdichtungen und Luftverdünnungen nicht auftreten. Greifen wir zunächst den Fall heraus, dass eine Kugel auf einer Graden hin- und herschwingt. Wenn man sich die Kugel ruhend denkt und die Luft gegen sie strömend annimmt, so werden beim Auftreffen auf dieselbe die einzelnen Lufttheilchen aus ihrer Bewegungsrichtung etwas abgelenkt, um an der Oberfläche entlang zu gleiten.

Es wird also mehr die Luftreibung als der eigentliche Luftwiderstand eine Rolle spielen. Bei den übrigen Fällen handelt es sich ausschliesslich um Luftreibung, wobei von Verdichtungen keine Rede sein kann.

Es erübrigt noch die Geschwindigkeit festzustellen, welche bei meinen Versuchen vorkam. Wie Tab. I und II zeigen, beziehen sich die (den Berechnungen zu Grunde gelegten) Enddekremente auf Elongationen von etwa 0,7 mm = 0,07 cm. In der Zeit T (2 Sekunden) wurde der Weg von 0,07 cm viermal von der Scheibe durchlaufen, also ist ihre mittlere Geschwindigkeit $= \frac{4 \,.\, 0{,}07}{2} = 0{,}14$ cm. Demnach beträgt das Maximum der Geschwindigkeit, welches die Scheibe beim Durchgange durch die Ruhelage besitzt, 0,22 cm. (Man erhält bekanntlich bei Pendelschwingungen die Maximalgeschwindigkeit aus der mittleren durch Multiplication mit $\frac{\pi}{2}$.)

Die Resultate meiner Versuche mit kreisförmigen Scheiben lassen sich in folgende zwei Sätze fassen.

1. Es giebt keine auf die Einheit der Fläche bezogene sog. Luftwiderstandsconstante, sondern der spec. Widerstand wächst mit zunehmendem Flächeninhalt der Scheibe[1]).

2. Die theoretische Entwickelung Braun's ist bei Geschwindigkeiten von 0,14 cm für in Luft schwingende Scheiben nicht brauchbar.

II. Der Luftwiderstand bei oblongen Platten.

Nach Feststellung des unter 1. gegebenen, auf die Scheibengrösse bezüglichen Satzes, welcher natürlich sofort verallgemeinert und auf beliebig gestaltete Scheiben ausgedehnt werden kann, ging ich dazu über, auch die Scheibenform in's Auge zu fassen. Daher wandte ich mich der Untersuchung quadratischer und rechteckiger Platten zu. Die Resultate dieser Versuche, welche genau wie bei den kreisförmigen Scheiben angestellt wurden, sind in der umstehenden Tabelle zusammengestellt. (Die Dicke der Zinkplatten betrug auch hier $^3/_4$ mm.)

Bei Betrachtung dieser Tabelle springen vorzüglich drei Punkte in die Augen:

1. Es zeigt sich, hier gerade wie bei runden Scheiben, dass der spec. Widerstand mit dem Flächeninhalt der Platten wächst. Vergleiche die Platten 1, 5 und 7.

Ganz evident tritt das vorstehende Gesetz wiederum (cf. Tabelle III, Nr. 4 und 5) bei Vergleichung der Nr. 6 und 7 hervor. Beide Platten haben gleichen Gesammt-Inhalt, aber bei letzterer ist die Fläche ein einziges zusammenhängendes Quadrat von 600 qcm, während sie bei Nr. 6 aus zwei getrennten Quadraten von je 300 qcm besteht. Unser Gesetz fordert, dass für die grössere, zusammenhängende Fläche ν

---

1) Dasselbe Resultat gewinnt E. Töpler in seiner mir während des Druckes des vorl. Aufsatzes bekannt gewordenen theor. Arbeit: „Die Ermittlung des Luftwiderstandes nach der kinet. Gastheorie". Wien 1886.

Tabelle V.

	I. Flächen-Inhalt	II. Umfang	III. Schwingungsdauer	IV. log. Dekrem. brigg. pro Schwingung (λ)	V. $\lambda - \lambda^1$	VI. $(\alpha - \alpha^1)$	VII. ν
	qcm	cm					
Nr. 1 quadr. Platte, Seite = 17,32 cm	300	69,3	2,004	0,00254	0,00101	0,001160	0,004251
„ 2 rechteck. Platte, 20 cm lang, 15 br.	„	70	2,005	260	107	1229	4501
„ 3 do. 30 „ „ 10 „	„	80	2,003	254	101	1160	4253
„ 4 do. 50 „ „ 6 „	„	112	2,000	252	099	1140	4175
„ 5 quadr. Platte, Seite = 17,4 cm	302,76	69,6	2,005	257	104	1194	4335
„ 6 2 gleiche quadr. Platten, Seite = 17,32 cm	600	138,6	2,011	368	215	2462	4509
„ 7 quadr. Platte, Seite = 24,5 cm	600	98	2,015	388	235	2685	4919
„ 8 ringförm. Platte, äusserer Radius 17,9 cm, innerer 10 cm	692,44	185,2	2,009	414	261	2991	4748
„ 9 Kreisscheibe mit 3 runden, symmetr. liegenden Löchern.	540,59	173,3	2,006	370	217	2491	5064

grösser sei als für die zwei kleineren getrennten, ganz wie es die Tabelle zeigt.

2. Es ergeben sich hier, für unsere oblongen Platten, durchweg höhere Werthe für ν als bei runden Scheiben von gleichem Flächeninhalt. Diese Thatsache mag zum Theil ihren Grund haben in der Randreibung, da oblonge Platten einen grösseren Umfang haben als kreisrunde von gleicher Fläche. Der hauptsächlichste Grund aber wird darin beruhen, dass bei ersteren das Abfliessen der Luft weit unregelmässiger erfolgt als bei letztern und dass daher dort die Stauungen sich besser ausbilden können als hier. Dass nicht die Randreibung allein die Vergrösserung des ν bewirke, dafür spricht deutlich die Thatsache, dass Platte Nr. 4 ein kleineres ν als Nr. 1, 2 und 3 zeigt, dass ferner Platte Nr. 9 ein grösseres ν als Nr. 8 besitzt. Grade Scheibe 9 zeigt, wie sehr die Unregelmässigkeit der Plattenfigur erhöhend auf ν einwirkt.

3. Es scheint, dass, wenn man von einer quadr. Platte ausgehend durch Wachsenlassen der einen und entsprechende Verminderung der andern Dimension zu rechteckigen Platten übergeht, zunächst ν wächst, um bei noch weitergehendem Schmalerwerden der Scheibe wieder zu fallen. Vergleiche die Platten Nr. 1, 2, 3 und 4.

III. Die Versuche von Kurz und Braun und von Boedeker.

Den meinigen ähnliche Versuche zur Bestimmung des Luftwiderstandes sind angestellt von Braun und Kurz[1]) und Boedecker[2]).

Die genannten Herren bedienten sich der eingangs skizzirten Methode der Drehwage.

Kurz und Braun untersuchten runde Cartons von

1) Braun und Kurz, „Ueber den Luftwiderstand bei kleinen Geschwindigkeiten.“ Münchener Sitzungsberichte Bd. XI (1881).

2) E. Boedeker, „Versuche zur Bestimmung des Luftwiderstandes bei kleinen Geschwindigkeiten.“ Inaug.-Diss. Göttingen 1881.

drei verschiedenen Grössen, nämlich vom Radius 1,4—2,8 und 4,2 cm. Sie fanden in drei, etwas untereinander modificirten Versuchsreihen für ν die folgenden Werthe (welche aus dem von ihnen gebrauchten konventionellen in das von mir benutzte absolute Maasssystem umgerechnet sind durch Multipliciren mit 980,8)

0,00275
0,00330
0,00303.

Sie betrachten diese Werthe als identisch und geben das Mittel aus ihnen, also 0,003, als die auf die Einheit der Fläche und der Geschwindigkeit bezogene Constante des Luftwiderstandes an.

Sorgfältiger und mit mannigfaltigen Variationen hat Boedeker rechteckige Metallplatten untersucht. Der Flächeninhalt der von ihm benutzten Scheiben variirt zwischen 5 und 10,9 qcm; nur bei 4 Scheiben geht er höher, nämlich zu 50, 80, 110 und 140 qcm. Boedeker fand für ν, welches sich zwar nicht constant, aber auch nicht gesetzmässig mit dem Flächeninhalt der Scheiben verknüpft zeigte, bedeutend geringere Werthe als Braun und Kurz; als Mittel giebt er an: 0,001971.

Dass ich bei meinen Versuchen durchweg höhere Zahlen für ν erhielt, als die Genannten, hat einmal darin seinen Grund, dass ich mit grösseren Scheiben experimentirte, ein zweites Moment liegt in der von ihnen angewandten Methode.

Der Luftwiderstand auf eine sich bewegende Scheibe kommt offenbar nur dann rein und ungeschwächt zur Geltung, wenn für die abfliessenden Lufttheilchen keine Richtung den Vorzug hat. Das ist bei der Methode der Drehwage nicht der Fall, wie schon Boedeker hervorhebt. Es bildet sich vielmehr, weil die einzelnen Theile der Scheibe nicht gleiche Geschwindigkeit besitzen, ein in bestimmter Richtung fliessender Luftstrom aus, welcher allerdings nicht, wie Boedeker annimmt, von dem äussern zum innern, der Drehaxe zunächst liegenden Rande, sondern umgekehrt vom innern zum äussern Rande hin verläuft, wie Braun richtig bemerkt (l. c. pg. 773).

Der Strom wird nämlich dahin gelenkt, wo er den geringsten Widerstand findet, also nach der Stelle, wo die stärkste Luftverdünnung eingetreten ist. Dieses ist aber hinter dem äussern Rande geschehen, da derselbe die grösste Bewegungsgeschwindigkeit besitzt.

Die von allen Seiten zur Ausfüllung der dort entstandenen Lücken herbeiströmenden Lufttheilchen werden auch die Bildung und Richtung der Strömung vor der Platte bestimmen. Der Strom geht also wesentlich nach dem äusseren Rande und biegt um ihn herum, sich in Wirbel auflösend.

Der Effect dieses einseitigen Strömens besteht in einer Schwächung des Luftwiderstandes. Die Stärke und Ausdehnung des Stromes und damit seine abschwächende Wirkung wird wachsen einmal mit der Grösse, vorzüglich mit der Breite der Platten, zweitens innerhalb gewisser Grenzen mit der Geschwindigkeit der Scheibe.

Boedeker's Versuche liefern die Belege[1]).

Das Gesetz, dass der spec. Widerstand mit der Grösse der Platten wächst, konnte Boedeker mittelst seiner Methode nicht auffinden; nimmt doch ν in einer der citirten Tabellen (2. Tab. pag. 31) mit wachsendem Flächeninhalt ab.

Jedoch eine Versuchsreihe, bei der die Grösse und folglich die Wirkung des Luftstromes nur eine geringe war, lässt das Wachsen des spec. Widerstandes ν mit dem Scheibeninhalt unzweideutig erkennen. Es ist die Versuchsreihe, welche in der ersten Tabelle auf Seite 31 niedergelegt ist und welche ich, soweit es nöthig ist, hier reproducire. Es sind 6 rechteckige Plattenpaare untersucht, welche sämmtlich die Breite von 1,5 cm besitzen, während die Länge derselben verschieden ist. Je zwei gleiche Platten wurden derart auf dem Wagebalken befestigt (an jedem Ende des Balkens eine), dass die längeren Kanten vertikal, also der Drehaxe parallel standen.

---

1) Siehe a. a. O. die Tabellen auf Seite 26 und die 2. Tab. auf Seite 31 und 28.

Die Resultate sind diese:

	Länge der Platten	Flächen-Inhalt	Umfang	ν
	cm	qcm	cm	
Nr. 1	4,5	6,75	12	0,0009386
„ 2	5	7,5	13	10793
„ 3	5,5	8,25	14	20897
„ 4	6	9,0	15	24307
„ 5	6,5	9,75	16	27884
„ 6	7	10,5	17	28242

Mittlere Geschwindigkeit 0,06 cm.

Dass hier das Wachsen des ν nicht allein, wie Boedeker meint, von der Zunahme des Umfanges abhängen, also eine Folge der Randreibung sein kann, ist evident, wenn wir Tabelle 2 auf Seite 27 zur Vergleichung heranziehen. Dieselbe bezieht sich auf Platten von constantem Flächeninhalt, aber von verschiedenem Umfang. Sie waren in derselben Weise befestigt wie die Platten der vorstehenden Tabelle (die längeren Kanten der Drehaxe parallel) und lieferten die folgenden Werthe:

	Flächeninhalt	Umfang	ν
Nr. 1	9 qcm	2 (3 + 3) = 12 cm	0,0011354
„ 2	„	2 (1,8 + 5) = 13,6 „	15551
„ 3	„	2 (1,6 + 6) = 15,0 „	14290
„ 4	„	2 (1,2 + 7,5) = 17,4 „	19065

Während der spec. Widerstand ν beim Ansteigen des Umfanges von 12 auf 17 cm in der ersten Tabelle, wo der Flächeninhalt gleichzeitig wächst, sich um das Dreifache erhöht, nimmt er in der zweiten Tabelle, wo der Flächeninhalt constant bleibt, nur um das $1^2/_3$fache zu. Daraus folgt unzweifelhaft, dass das Wachsen des Flächeninhalts ebenfalls erhöhend auf ν einwirkt. Dieses Gesetz gilt also nicht blos bei der Geschwindigkeit von 0,14 cm, auf welche sich meine Versuche beziehen, sondern auch noch bei der von Boedeker angewandten Geschwindigkeit von 0,06 cm. Demnach ist auch die Braun'sche Entwickelung selbst bei dieser ausserordentlich geringen Geschwindigkeit unbrauchbar.

Zum Schlusse mache ich noch auf einen Uebelstand aufmerksam, der sich bei Dämpfungsbeobachtungen mittelst der Methode der Drehwage in hohem Grade störend bemerklich macht, nämlich auf die Empfindlichkeit gegen Temperaturschwankungen. Braun sagt darüber (l. c. pg. 787):

„Es hat sich gezeigt, dass die geringsten Temperaturänderungen, welche selbst mit einem nach Zehntel-Graden eingetheilten Thermometer kaum noch wahrgenommen werden können, wegen der damit verbundenen Luftströmungen erhöhend auf das logar. Decrement einwirken.“

In einem ebenfalls im 20. Bande von Exner's Repertor. abgedruckten Aufsatze: „Die Abhängigkeit der Luftdämpfung von Temperaturschwankungen“ belegt Braun die angeführte Bemerkung mit mehreren experimentell gefundenen Zahlenreihen. Diese der Methode der Drehwage innewohnende Empfindlichkeit tritt bei der von mir angewandten Methode nicht so sehr hervor. Durch Temperatur-Veränderungen verursachte Luftströmungen haben nämlich inmitten des Zimmers wesentlich eine auf- resp. abwärts gehende Richtung. Daher beeinflussen sie die horizontal schwingenden Platten an der Drehwage in jedem Moment der Bewegung in derselben Weise. Bei meinen auf- und abwärts schwingenden Scheiben aber liegt die Sache anders. Was z. B. bei aufwärts gerichtetem Luftstrome bei der Schwingung nach unten an lebendiger Kraft in Folge der entgegenwirkenden Strömung mehr verloren wird, das wird bei der Schwingung nach oben in Folge der gleichgerichteten Strömung weniger verloren. Der Gesammtverlust ist also derselbe, als wenn überhaupt keine Luftströmung stattfände. Aus diesem Grunde konnte ich auch im freien Zimmer meine Versuche anstellen, wobei ich allerdings so viel wie nur möglich seitliche Luftströmungen vermeiden musste.

Die bisherigen Resultate meiner Arbeit lassen sich in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Die theoretische Entwickelung Braun's ist auf in Luft schwingende Scheiben nicht anwendbar.

2. Die Drehwage ist zur Bestimmung des reinen Luftwiderstandes nicht geeignet.

3. Eine sogen. Luftwiderstandsconstante existirt nicht sondern

4. Der specifische Luftwiderstand ist abhängig:

a. von der Grösse der Scheiben und zwar wächst derselbe mit dem Flächeninhalt;

b. von der Form der Scheiben und zwar erfahren runde Scheiben einen geringeren spec. Widerstand als inhaltsgleiche oblonge. Ueberhaupt scheint der spec. Widerstand um so grösser zu sein, je unregelmässiger die Scheibenform ist.

IV. Versuche mit schwingenden Kugeln und Vergleichung der theoretischen und experimentellen Ergebnisse für dieselben.

Boedeker hat in seiner oft citirten Arbeit auch einen Versuch angestellt zur Bestimmung der Dämpfung, welche zwei an dem horizontalen Hebelarm der Drehwage befestigte Kugeln erfahren. Solche Versuche mit schwingenden Kugeln können zur Controle der Genauigkeit der Beobachtungsmethode dienen, indem man die Werthe der Luftdämpfung, wie sie für schwingende Kugeln von mehreren Forschern (Stokes, O. E. Meyer, Kirchhoff) theoretisch berechnet sind, mit den auf erperimentellem Wege gefundenen Zahlen vergleicht.

Die Bestätigung der Richtigkeit und Brauchbarkeit haben die von den genannten Theoretikern aufgestellten Formeln schon anderweitig gefunden, z. B. durch die mit ihrer Hülfe geschehene Berechnung der Luftreibungsconstante.

Boedeker's Beispiele folgend habe ich nun nach meiner Methode mehrere schwingende Kugeln auf ihre Luftdämpfung untersucht. Die Beobachtung fand gerade so statt, wie bei den früheren Versuchen mit Platten; nur das Arrangement des Apparates war insoweit abgeändert, als die zu untersuchende Kugel unterhalb der Glasröhre hing. Die letztere trug nämlich am unteren Ende einen kleinen Knopf, an welchem die Kugel vermittelst eines 25 cm langen, feinen Drahtes befestigt war. Die Glasröhre ihrerseits war durch ihren 20 cm langen Draht an dem die Marke tragenden Scheibchen suspendirt.

Untersucht wurden drei Hohlkugeln aus Glas von verschiedener Grösse. Die beiden kleineren besassen eine runde, kleine Oeffnung mit aufgewulstetem Rande, um welchen der sie tragende Draht gezogen wurde. Sie wurden zur Erzeugung des gewünschten Gewichtes (495 gr) mit Schrot fast vollständig gefüllt. Die dritte, grösste Kugel war vollständig geschlossen und behufs ihrer Befestigung mit einem Hacken versehen. Bei ihr wurde der nöthige Schrot in die Gasröhre gebracht.

Meine Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle niedergelegt.

Tabelle VI.

	I. Radius	II. Schwingungsdauer	III. log. Dekr. brigg. pro Schwingung (λ)	IV. $\lambda - \lambda^1$	V. $\delta = \frac{\lambda - \lambda^1}{2} \cdot 2{,}30258$
Nr. 1	5,15 cm	2,0000	0,001765	0,000235	0,0002706
„ 2	6,6 „	2,0016	1890	360	4145
„ 3	8,13 „	2,0055	2140	610	7023

In Col. V ist das logarithm. Dekrement in natürlichen Logarithmen und pro Schwingung gegeben.

Kirchhoff[1]) giebt nun für die Schwingungen einer in einer reibenden Flüssigkeit befindlichen Kugel, deren Mittelpunkt auf einer graden Linie sich bewegt, die Formel:

$$\delta = {}^9/_8 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \frac{m}{m + \frac{m^1}{2}} \sqrt{2 \pi T_0}.$$

Hier ist δ das logar. Dekrement pro Schwingungsbogen in natürlichen Logarithmen, μ der Reibungscoefficient

1) Vorlesungen über mathematische Physik (Mechanik) pg. 338.

der Luft = 0,00019 ($gr.^{1}$ $cent.^{-1}$ $sec.^{-1}$). ϱ die Dichtigkeit der Luft bezogen auf Wasser von 4° C. m die gesammte zu bewegende Masse, wie früher = 549,5 gr.

m^1 die Masse der von der Kugel verdrängten Luft, T_0 die einfache Schwingungsdauer des Apparates ohne Kugel, also $= \frac{1,996}{2} = 0,998$ sec.

R der Radius der Kugel.

Für den gleichen Fall giebt Stokes[1]) die Formel[2]):

$$\delta = \frac{\frac{1}{2}\pi q^1 m^1}{m + q m^1}$$

wo

$$q = \frac{1}{2} + \frac{9}{4\sigma R};$$

$$q^1 = \frac{9}{4\sigma R}\left(1 + \frac{1}{\sigma R}\right);$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi \varrho}{T \mu}}.$$

In der folgenden Tabelle sind die theoretisch berechneten und die experimentell gefundenen Werthe für δ zusammengestellt.

Tabelle VII.

	ϱ	δ berechnet nach Kirchhoff	δ berechnet nach Stokes	δ experiment. beobachtet
Nr. 1	0,001212	0,0002730	0,0002867	0,0002706
„ 2	1223	4503	4723	4145
„ 3	1211	6794	7072	7023

Die berechneten und beobachteten Werthe stimmen recht gut überein und können als identisch angesehen werden, wenn man in Betracht zieht, dass die von mir benutzten Kugeln nicht rigorös kugelförmig, sondern ein

1) Cambridge phil. Trans. Vol. 9. Part. 2. pg. 32.

2) Eine von O. E. Meyer in Crelle's Journal, Bd. 73 entwickelte Formel ist mit der Stockes'schen identisch, abgesehen von unendlich kleinen Grössen.

wenig elliptisch ausgezogen waren. Bei der Kugel Nr. 3 z. B. betrug ein Durchmesser 16,5 cm, der darauf senkrechte 16,0 cm. Ich habe der Berechnung den Mittelwerth zu Grunde gelegt. Vergleichsweise setze ich die Zahlen her, welche Boedeker einerseits aus einer Kirchhoff-schen Formel als Dämpfung für eine Kugel von 10 cm Durchmesser berechnet und andrerseits mittelst der Drehwagen-Methode experimentell gefunden hat:

Durch Rechnung fand er:

$$\delta = 0{,}00121.$$

Durchs Experiment fand er:

$$\delta = 0{,}00289.$$

Er fügt selbst hinzu:

„Es zeigt sich also ein bedeutender Unterschied zwischen dem beobachteten und berechneten Werthe, welcher beweist, dass die angewandte Beobachtungsmethode weit entfernt ist, die reine Wirkung des Luftwiderstandes auf die Dämpfer erkennen zu lassen. Der hauptsächlich störende Einfluss wird einmal von dem freilich unentbehrlichen Träger und von der Anwendung zweier Kugeln statt einer herrühren, sodann muss nothwendiger Weise ein Unterschied in dem Verhalten der in dem Kasten eingeschlossenen und der unbegrenzten Luft bestehen, für welche die theoretischen Formeln entwickelt sind und allein strenge Gültigkeit haben“.

Sämmtliche von Boedeker hervorgehobenen Fehlerquellen fallen bei der von mir angewandten Methode fort.

Am Schlusse dieser Arbeit erfülle ich die angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. Ketteler für die wohlwollende Anregung, welche er mir während der Arbeit zu Theil werden liess, meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.