Die Verwendung der einfachen Camera zur Ermittelung von Höhen und Entfernungen.

Mit Tafel III.

2. Teil.

Von

Prof. Dr. Schönemann

in Soest.

1. Ermittelung durch Randlinien. Verschiedene Mitglieder des Vereins äußerten sich nach meinem ersten Vortrage[1]) dahin, daß es von großem Interesse wäre, ein möglichst einfaches Verfahren zu finden, mit Hilfe dessen man aus zwei Photographien die Länge senkrechter Linien, die Höhe eines Punktes über dem Horizont bestimmen könne. Ich teile in diesem Aufsatz verschiedene Vereinfachungen und weitere Ergebnisse meines Verfahrens mit. Zur Begründung müssen auch einige geometrische und rechnerische Betrachtungen angestellt werden, welche leicht verständlich sind.

In meinem ersten Aufsatz „Die Verwendung der einfachen Camera zur Ermittelung von Höhen und Entfernungen" hatte ich ein Verfahren angegeben, um die Bilder gedachter identischer Graden möglichst genau als Randlinien zu zeichnen. Aber es gelang mir nicht, die bis auf den zehnten Teil eines Millimeters berechnete Entfernung der Randlinie auch praktisch zu zeichnen. Der sich herausstellende Fehler musste durch die Rechnung verbessert werden.

Man schreibt an eine der gezeichneten Randlinien die Zahl der Zehntel eines Millimeters an, welche zu jedem

[1]) Verh. d. Nat. Ver. Jg. 60, 1903. S. 101.

Abstand einer senkrechten Bildlinie zu addieren ist, um den Minuendus der betreffenden Differenz zu erhalten, welche ihrer Bedeutung nach die mit $\varDelta$ bezeichnete perspektivische Verschiebung ist. (Siehe erwähnten Aufsatz 60. Jahrgang 1903 Seite 113.)

Da man nun doch eine leicht zu ermittelnde Zahl zu der einen Randlinie addieren muß, um den Fehler der Zeichnung auszugleichen, so ist es offenbar gleichgültig, wie groß diese Zahl ist. Es kommt nicht darauf an, ob wir 0,6 oder 4,8 hinzu addiert haben. Hieraus ergibt sich aber, daß wir zwei beliebig gezogene Randlinien, die derselben senkrechten Bildlinie parallel sind, zur Bestimmung von zwei gedachten Bildlinien einer identischen Graden in unendlicher Entfernung benutzen können, wenn wir nur die eine von ihnen mit der nötigen hinzuzufügenden Konstanten versehen. In diesem Aufsatz ist aus bestimmten Gründen der linke Stationspunkt mit O_1, der rechte mit O_2 bezeichnet.

Angenommen R_1 und R_2 Fig. Ia und Fig. Ib seien beliebig gezogene Randlinien; E_1 und E_2 seien die Abstände von den 2 Bildlinien einer identischen Graden in endlicher Entfernung, auf denen die Größe der Basis B in $i_1 l_1$ und $i_2 l_2$ abgebildet ist. Die betreffenden Bildlinien sind mit $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ bezeichnet.

Wären R_1 und R_2 als Bilder einer unendlich fernen identischen Graden anzusehen, so müßte, wie im ersten Aufsatz entwickelt ist, $E_1 - E_1 = \varDelta$ sein, wo $\varDelta = i_1 l_1 = i_2 l_2$ wäre.

Da aber R_1 und R_2 beliebig gezogen sind, so wird $E_1 - E_2$ nicht $= \varDelta$ sein.

Aber wir können eine Zahl Z so wählen, daß

$$Z + E_1 - E_2 = \varDelta \text{ ist; est ist } Z = \varDelta - (E_1 - E_2)$$

zu setzen und zu jedem Abstand E_1 einer Senkrechten in Fig. Ia hinzuzufügen.

Angenommen es sei $i_1 l_1 = 5{,}4$ gemessen; dann ist $\varDelta = 5{,}4$.

Nun muß $Z + E_1 - E_2 = 5{,}4$ sein.

Die Messung ergibt $E_1 = 15,9$; $E_2 = 12,8$; also muß
$Z + 15,9 - 12,8 = 5,4$ sein; hieraus ergibt sich
$Z = 2,3$.

Wir schreiben nun an R_1 die konstante Zahl $+2,3$.

Als Bilder einer identischen Graden in unendlicher Entfernung sind nun anzusehen die gezeichnete Linie R_2 (Fig. Ib) und die gedachte Linie, welche im Abstande von 2,3 mm von R_1 nach links (Fig. Ia) als punktierte Linie angegeben ist.

Man zeichnet aber die punktierte Linie nicht hin, sondern addiert die ermittelte konstante Zahl 2,3 zu dem betreffenden Abstande E_1 für jede senkrechte Linie des Bildes hinzu.

Von dieser Summe wird dann der entsprechende Abstand E_1 des anderen Bildes subtrahiert, um die zugehörige Verschiebung $\varDelta$ der abgebildeten Linie zu erhalten.

Wenn man nun mit beliebig gezogenen Randlinien operiert, wird man sie auf folgende Art zeichnen. Man legt die Bilder nach dem Augenmaß erst so untereinander, daß die linken Begrenzungslinien der Bilder in eine Grade fallen. Man heftet dann das obere Bild mit 4 Stiften an den Ecken fest und befestigt das untere zunächst nur durch einen Stift an der oberen linken Ecke, so daß es um diesen Punkt drehbar ist. Nun sorgt man dafür, daß die längsten senkrechten identischen Bildlinien auf beiden Bildern genau parallel sind. Hat man mittelst Lineals und rechten Winkels und passende Drehung des unteren Bildes diese Lage erreicht, so steckt man auch das untere Bild fest: Nun zieht man zu der größten senkrechten Bildlinie eine Parallele über beide Bildränder. Die Ermittelung der additiven Konstanten, die nach Umständen dem Minuenden oder dem Subtrahenden der Differenz der Abstände identischer Punkte von den Randlinien hinzuzufügen ist, um die genaue perspektivische Verschiebung zu erhalten, erfolgt dann auf die soeben erwähnte Art.

Die im ersten Aufsatz erwähnte umständliche Methode des erstrebten möglichst genauen Zeichnens der Bilder identischer unendlich ferner Graden fällt fort.

Man kann auch in jedem Bilde für sich eine der größten Senkrechten parallele beliebige Randlinie ziehen und die betreffende Konstante ermitteln.

2. **Einführung der Sternlinien und ihre Verwendung.** Nun kann man aber auch zu jeder beliebigen senkrechten Bildlinie des linken Bildes die zugeordnete des rechten Bildes derartig bestimmen, daß die vorhandene senkrechte des linken Bildes und die gedachte zugeordnete des rechten Bildes als Bilder einer einzigen Graden in unendlicher Entfernung aufzufassen sind.

Es seien $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ in Fig. IIa, IIb die Bilder einer senkrechten Graden in endlicher Entfernung. Es seien $i_1 l_1$ und $i_2 l_2$ die Bilder einer Strecke, die gleich der Basis von dieser senkrechten Graden markiert ist. Dann ist $i_1 l_1 = i_2 l_2$; die perspektivische Verschiebung $\varDelta$ ist dann gleich $i_1 l_1$. Zieht man auf dem rechten Bilde die punktierte Linie $a_2{}^* b_2{}^*$ im Abstande $\varDelta = i_1 l_1$ parallel zu $i_2 l_2$, so sind $a_1 b_1$ und $a_2{}^* b_2{}^*$ als Bilder einer identischen Graden in unendlicher Entfernung anzusehen.

Es stellt Fig. IIc den Grundriß erörterter Beziehungen dar. Bilder des Punktes A sind a_1 und a_2. Denken wir uns über A im ersten Stationspunkt o_1 einen Stern stehen, so fällt das Bild des Sterns im zweiten Stationspunkt O_2 auf Punkt $a_2{}^*$; es ist Linie $O_1 a_1 \parallel O_2 a_2{}^*$. Es ist Linie $a_2 a_2{}^*$ gleich der perspektivischen Verschiebung $\varDelta$ des Punktes A.

Bisher war $\varDelta$ aufgefaßt worden als die Differenz der Entfernungen identischer Bildpunkte von den 2 Bildlinien (Randlinien) einer identischen Graden in unendlicher Entfernung. Hier ist auf dem linken Bilde die eine Entfernung gleich Null, da a_1 gleichzeitig als Bild der durch den Stern markierten unendlich fernen Graden angesehen wird. Mithin ist auf dem rechten Bilde $a_2 a_2{}^* = \varDelta$.

Wir bezeichnen die punktiert gezeichnete Linie auf dem rechten Bilde in Fig. IIb als die zu $a_1 b_1$ zugeordnete Sternlinie. Zum schnellen Verständnis einer zu erörternden wichtigen Beziehung denken wir uns in folgende Vorstellung hinein: Fig. IIIa, IIIb, IIIc.

In den Punkten A, B, C seien drei senkrechte Linien, Fig. IIIc, von beliebiger Länge errichtet; über jeder Linie stehe in gleicher Höhe ein Stern. Die senkrechten Linien werden im ersten Stationspunkt O_1 abgebildet auf die mit griechischen Buchstaben bezeichneten Strecken α_1, β_1, γ_1; die entsprechenden Sterne auf a_1^*, b_1^*, c_1^*, dieselben sind also in der Verlängerung der Strecken α_1, β_1, γ_1 abgebildet.

Im zweiten Stationspunkt O_2 werden die in A, B, C der Fig. IIIc errichteten Senkrechten auf α_2, β_2, γ_2 abgebildet in Fig. IIIb. Die in O_1 über A, B, C befindliche Sterngruppe wird von O_2 aus abgebildet auf die mit $a_2^* b_2^* c_2^*$ bezeichnete Sterngruppe. Die beiden Sterngruppen sind miteinander kongruent; nicht kongruent sind die Liniengruppen. In dem rechten Bilde, das von O_2 aus aufgenommen, ist jede Linie um ihre perspektivische Verschiebung Δ in bezug auf den ihr zugeordneten Stern nach links verschoben.

Bezeichnen wir die zum Punkt A oder die der Linie α_2 zukommende perspektivische Verschiebung mit Δ_a, ebenso die betreffenden anderen Verschiebungen mit Δ_b und Δ_c, so ist der Abstand von a_2^* und Linie $\alpha_2 = \Delta_a$; ebenso ist der Abstand von b_2^* und Linie $\beta_2 = \Delta_b$ und der Abstand von c_2^* in Linie γ_2 ist $= \Delta_c$.

Der übersichtlichen Bezeichnung wegen führen wir noch die Entfernung von den Bildern identischer Linien bei den Bildern ein. Wir bezeichnen die Distanz der Linien α_1 und α_2 mit dem Buchstaben D_a, die Entfernung der Linien β_1 und β_2 mit D_b, die Entfernung der Linien γ_1 und γ_2 mit D_c.

Nach dieser Bezeichnung ist

in Fig. IIIc		in Fig. IIIa und IIIb
$a_1 a_2 + a_2 a_2^*$	$=$	$D_a + \Delta_a$
$b_1 b_2 + b_2 b_2^*$	$=$	$D_b + \Delta_b$
$c_1 c_2 + c_2 c_2^*$	$=$	$D_c + \Delta_c$.

Nun sind die linken Seiten dieser Gleichungen gleich der Strecke $O_1 O_2$ als gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms, z. B. $O_1 O_2 a_2^* a_1$ in der ersten Gleichung (siehe Fig. IIIc), mithin sind auch die rechten Seiten gleich. Es ist

$$D_a + \varDelta_a = D_b + \varDelta_b = D_c + \varDelta_c.$$

Diese Beziehung bleibt bestehen, wenn wir beide Bilder durch Parallelverschiebung beliebig näher oder ferner rücken. Denn die mit $\varDelta$ bezeichneten Strecken bleiben dieselben, die mit D bezeichneten Strecken werden um die konstante Größe der Verschiebung beim Aneinanderrücken verkleinert, beim Auseinanderrücken vergrößert.

3. Die Konstanten der Parallelverschiebung. Die Gleichung $D_a + \varDelta_a = D_b + \varDelta_b = D_c + \varDelta_c$ liefert in Worten ausgedrückt folgendes Ergebnis:

Legt man zwei Photographien, welche durch Parallelverschiebung entstanden sind, nach der Reihenfolge ihrer Aufnahme nebeneinander, so ist die Summe der Entfernungen zweier identischer Punktbilder und ihrer perspektivischen Verschiebung eine konstante Größe K. Ihrer Bedeutung nach ist diese Größe K gleich der Entfernung der Bilder von zwei identischen Punkten in unendlicher Entfernung.

Nehmen wir nämlich an, in $D_c + \varDelta_c$ sei Punkt C unendlich weit entfernt, so wird $\varDelta_c = 0$; $D_c + \varDelta_c$ geht für $\varDelta_c = 0$ in den Wert K über. Hat man die Bilder nebeneinander gelegt und kennt eine einzige Verschiebung, z. B. $\varDelta_a$ durch das Bild einer senkrechten Linie von der Länge der Basis im Punkte A, so ist $D_a + \varDelta_a$ oder die konstante Größe K bekannt. Nun kann man alle übrigen perspektivischen Verschiebungen auf folgende Weise ermitteln.

Da $D_a + \varDelta_a = K$, so ist auch

$D_b + \varDelta_b = K$; denn es ist

$D_a + \varDelta_a = D_b + \varDelta_b = D_c + \varDelta_c$ etc.,

mithin ist $\qquad \varDelta_b = K - D_b.$

Ist also K ermittelt, so wird $\varDelta_b$ und jede perspektivische Verschiebung eines anderen Punktes auf folgende

Art ermittelt: Man zieht von der konstanten Größe K die Entfernung der identischen Linien d. i. D_b ab. Die sich ergebende Differenz ist die gesuchte perspektivische Verschiebung Δ_b.

So wird jede perspektivische Verschiebung bei festgesteckten Bildern, die nebeneinander befestigt sind, durch einmalige Messung der Entfernung identischer Bildpunkte (D_b) dargestellt als eine Differenz mit konstantem Minuendus K. Subtrahendus ist die jedesmalige Entfernung identischer Bildpunkte.

Die laufende Gleichung $D_a + \Delta_a = D_b + \Delta_b = D_c + \Delta_c$ liefert ein wichtiges Ergebnis, welches zur Prüfung einer Linse angewendet werden kann, ob sie ein richtig perspektivisch gezeichnetes Bild liefert.

Markiert man auf einer Anzahl senkrechter Linien in verschiedenen Entfernungen das Maß der Basis durch geeignete Kreidestriche oder Papierstreifen, befestigt dann die Bilder nebeinander, so daß die Bilder der senkrechten Linien beider Photographien parallel sind, so muss der Abstand der Bilder von je 2 identischen Senkrechten vermehrt um das Bild der markierten Länge der Basis eine konstante Größe haben.

Wenn die Bilder diese Probe bestehen, so zeichnet die Linse perspektivisch richtig; wenn die Linse verzeichnet, kann die Probe nicht stimmen.

Fg. IV$_a$ und IV$_b$ stellt die Prüfung dar.

Die Bilder der Strecke, welche gleich der Basis sind, sind mit Δ_a, Δ_b, Δ_c bezeichnet. Die Entfernungen der Bilder identischer Linien sind mit D_a, D_b, D_c bezeichnet. Wir nehmen an, auf beiden Bildern sei die Entfernung von 2 gedachten sichtbaren Sternen gleich K ermittelt. Dann ist $D_a + \Delta_a = D_b + \Delta_b = D_c + \Delta_c = K$.

Es möge an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß sich auch ein bekanntes konstantes Produkt ergibt. Die Entfernungen zweier Punkte verhalten sich umgekehrt wie ihre perspektivischen Verschiebungen. Aus $\frac{E_1}{E_0} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$

folgt $E_1\,\varDelta_1 = E_o\,\varDelta_o$. Sind E_o u. $\varDelta_o$ als gegebene Größen bekannt, so wird aus abgelesener Größe $\varDelta_1$ die Entfernung $E_1 = \frac{E_o \varDelta_o}{\varDelta_1}$ bestimmt. Es ist allgemein $E_1 \varDelta_1 = E_2 \varDelta_2 = E_o \varDelta_o$.

Die rechnerische Probe wird aber in den Stellen hinter dem Komma des Dezimalbruches, welcher den Wert von $\varDelta$ angibt, nicht übereinstimmen, weil $\varDelta$ nur bis auf den 10. Teil eines Millimeters bestimmt werden kann und die folgenden Stellen unberücksichtigt bleiben müssen.

Hiermit hängt zusammen, dass man bei der Parallelverschiebung zu jedem ermittelten Werte der Entfernung oder der Höhe noch die Grenzwerte des möglichen Irrtums zu bestimmen hat, um den Genauigkeitssgrad richtig beurteilen zu können.

4. Praktische Ergebnisse und Anweisungen; Berücksichtigung der Grenzwerte. Für praktische Zwecke halte ich die Ermittelung von senkrechten Linien und ihrer Entfernungen von der Standlinie durch die Methode der nebeneinanderliegenden Bilder als das geeignetste Verfahren. Ich empfehle die Anwendung eines Apparats, welcher Bilder im Format 13 : 18 bei einer Brennweite von ca. 20 cm liefert. Ich habe mit dem Zeus Aplanat von Hüttig auf dem Terrain des Bahnhofs in Soest eine Aufnahme gemacht, deren Resultat ich mitteile.

Als Konstanten waren anzusehen die Anfangsentfernung E_o einer senkrechten Linie, eines Laternenmastes. Es war $E_o = 53{,}70$ m. An diesem Mast waren eiserne Sprossen angebracht. Die Entfernung der ersten und der über ihr stehenden dritten Sprosse betrug 2 m und war gleich der Verschiebung des Apparates, die als Basis oder Standlinie ebenfalls 2 m betrug. Das Bild der Entfernung beider Sprossen betrug 7,6 mm.

Es ist also die zur Entfernung $E_o = 53{,}70$ m gehörige perspektivische Verschiebungsstrecke $\varDelta_o = 7{,}6$ mm.

Zur Ermittelung der Entfernung von der Standlinie ergab sich aus der Beziehung $\frac{E_1}{E_0} = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}$ das konstante Produkt $E_0 \Delta_0 = 53{,}70. \quad 7{,}6 = 408{,}12.$

$$\text{mithin ist } E_1 = \frac{E_0 \Delta_0}{\Delta_1} \text{ oder}$$

$$E_1 = \frac{408{,}12}{\Delta_1} \text{ allgemein ist}$$

$$E_n = \frac{408{,}12}{\Delta_n}.$$

Δ_n ergibt sich aus der Messung; folglich ist E_n bestimmt.

Im ersten Aufsatz war mit ζ das Bild einer senkrechten Linie über dem Horizont bezeichnet; Z war die wirkliche Länge. Es ergab sich $Z = B \frac{\zeta}{\Delta}$. B war die Basis; im gegenwärtigen Falle ist $B = 2$ m.

Diese Beziehung bleibt bestehen, auch wenn keine Horizontlinie vorhanden ist. Bezeichnen wir in diesem Falle die Länge einer senkrechten Linie mit s, die Länge ihres Bildes mit σ so ergibt sich

$$s = B \frac{\sigma}{\Delta}.$$

Bei der Ermittelung der betreffenden Dimensionen auf Zelluloidpapier steckte ich die erhaltenen Bilder, nachdem sie getrocknet waren, mit Zeichenstiften auf einem Brette nebeneinander und erhielt folgende Ergebnisse:

Gegenstand	Verschiebung Δ	Ermittelte Entfernung (in Metern)	Wirkliche Entfernung (in Metern)	Unterschied	Ermittelte Länge einer Senkrechten i. Met.	Wirkliche Länge einer Senkrechten i. Met.	Unterschied
	mm						
Erster Signalmast	1,1	371	349	22	9,10	8,30	0,80
Zweiter Signalmast	1,6	255	242	13	8,75	8,25	0,50
Erste Telegraphenstange .	1,7	240	235	5	8	8,24	0,24
Zweite Telegraphenstange .	1,9	215	209	6	5,24	5,40	0,36
Dritte Telegraphenstange .	2,9	140	140,3	0,3	8,34	8,25	0,09
Haltesignal . .	4	102	98	4	3,05	2,90	0,15

Ich bemerke noch, dass ich allein die Verschiebung des Apparats mit Hilfe einer kleinen Bank vorgenommen habe. Ich bediente mich einer Dosenlibelle und visierte an der Vorderwand entlang nach entferntem Einstellungsmerkmal.

Die genaueste Ermittelung geschieht durch die Messung auf der Glasplatte am Negativ; auch diese habe ich angestellt und habe noch eine andere von mir gefundene Methode angewandt. Die Resultate waren wenig abweichend.

Es ist mir wohl bewusst, daß sich das Papier etwas zusammenzieht. Meiner Ansicht nach ist für die geringen Dimensionen der zu ermittelnden Verschiebungsstrecke das Zusammenziehen von unwesentlicher Bedeutung in bezug auf die überhaupt erreichbaren Resultate.

Bei Anwendung von Papierbildern kann die Entfernung identischer Punkte mit geeignetem Zirkel abgegriffen und auf dem Transversalmaßstabe ermittelt werden.

Bei Glasbildern muss der Maßstab angewendet werden, den nach meiner Angabe die Herren Breithaupt in Kassel ausgeführt haben, und welcher sich praktisch bewährt hat. Ich habe ihn zuerst in der Programmabhandlung des Soester Archigymnasiums Ostern 1905 beschrieben. Durch eine passende Rahmenvorrichtung können auch Glasbilder nebeneinander in geeigneter Weise befestigt werden. Es ist aber auch der Gebrauch dieses Maßstabes bei Papierbildern sehr zu empfehlen; er verbürgt den größten Grad der Genauigkeit.

Ich bin der Meinung, daß aus den mitgeteilten Ergebnissen sich ersehen läßt, welche Resultate jeder erreichen kann, der sich für diese Methode interessiert. Es wird die Fähigkeit vorausgesetzt, daß die Verschiebung Δ mit einer Genauigkeit gemessen wird, die den zehnten Teil eines Millimeters nicht überschreitet. Damit der Messende sich überzeugt, daß er diese Fähigkeit nach einiger Übung erlangt hat, muß er bei der Ermittelung einer Reihe von Entfernungen folgende Probe anstellen, die ich jetzt beschreibe.

Die größte Entfernung, welche ich bei der Standlinie von 2 m ermittelt habe, war die eines Signalmastes.

Bezeichnen wir die wirkliche Entfernung mit E, die ermittelte mit E', ebenso die wirkliche Größe der perspektivischen Verschiebung mit $\varDelta$, die ermittelte mit $\varDelta'$, so ergeben sich folgende Resultate:

Die wirkliche Entfernung $E = 349$ m,
Die ermittelte Entfernung $E' = 371$ m.

Es ergab sich E' durch die Ermittelung von $\varDelta' = 1{,}1$ auf folgende Art: $E' = E_0 \frac{\varDelta_0}{\varDelta_1}$; $E_0 \,.\, \varDelta_0 = 53{,}7 \,.\, 7{,}6 = 408{,}12$, mithin ist

$$E' = \frac{408{,}12}{1{,}1} \text{ m.}$$

Berechnen wir jetzt die wahre Größe von $\varDelta$, so ergibt sich folgender Zusammenhang. Da $E = \frac{408{,}12}{\varDelta}$, so muß für $E = 349$ m $349 = \frac{408{,}12}{\varDelta}$ oder

$$\varDelta = \frac{408{,}12}{349} \text{ oder}$$

$$\varDelta = 1{,}17 \text{ sein,}$$

wenn bei der zweiten Dezimalstelle abgebrochen wird.

Aus $\varDelta = 1{,}17$

$\varDelta' = 1{,}1$ ergibt sich der Messungsfehler $\varDelta - \varDelta' = 0{,}07$ mm.

Derselbe hat in der Entfernung von 349 m die Wirkung, daß er einen Irrtum von 22 m in der Entfernungsbestimmung veranlaßt bei einer Basis von 2 m.

So habe ich jede Messung geprüft; ich kann den größten Irrtum in der Bestimmung der Verschiebungsstrecke $\varDelta$ bei Glasbild und Papierbild = 0,1 mm setzen.

Um nun den Genauigkeitsgrad mittelst der Grenzwerte bestimmen zu können, wählen wir ein fingiertes Beispiel.

Der Beobachter habe für $E_0 \varDelta_0 = 408{,}12$ für die Entfernung $E = 68{,}02$ den genauen Wert $\varDelta = 6$ mm ermittelt.

Da 6 mm = 60 Teile sind, so ergibt sich

$$E = \frac{4081,2}{60} = 68,02.$$

Der Beobachter muß die Annahme machen, daß er sich um einen Teil geirrt haben kann; er muß berücksichtigen, daß seine größten Fehlergrenzen 59 und 61 sind. Hätte er 59 beobachtet, so wäre

$$E' = \frac{4081,2}{59}$$

$$\text{oder } E' = 69,17.$$

Hätte er $\Delta = 61$ gemessen, so wäre $E' = \frac{4081,2}{61} = 66,90$ gewesen. Der Beobachter kann also seine Messung nicht genau = 68,02 setzen, sondern muß sich sagen, daß die wirkliche Entfernung zwischen 69,17 und 66,90 liegt.

Wir können das erreichte Resultat auf folgende Weise schreiben:

$$\left[\frac{4081,2}{60}\right]_{61}^{59} = \begin{cases} 69,17 \\ 68,02. \\ 66,90 \end{cases}$$

Dieses ist der Charakter aller Ermittelungen durch Parallelverschiebung; es kommt auf vorliegenden Zweck an, ob das Resultat den Genauigkeitsgrad erreicht, daß es noch praktisch verwendbar ist. Der Genauigkeitsgrad wird um so größer, je kleiner der Unterschied der beiden Grenzwerte ist; im gegenwärtigen Falle ist derselbe $= 69,17 - 66,90 = 2,27$.

Untersuchen wir den Einfluß, welchen die Vergrößerung der Basis ausübt. Wir nehmen an, sie werde dreimal so groß gemacht. Wird aber die Basis $= 3.2$ m $= 6$ m, so wird auch die perspektivische Verschiebung von 6 mm auf 3.6 mm, d. i. auf 18 mm übergehen; desgleichen wird Δ_0 dreimal so groß werden.

Wir erhalten, $E = E_0 \frac{\Delta_0}{\Delta}$ in Ziffern ausgedrückt,

$$E = \frac{3 \,.\, E_0 \Delta_0}{3 \,.\, \Delta} \text{ oder}$$

$$E = \frac{12243{,}6}{180} = 68{,}02.$$

Der Beobachter muß nun, um die Grenzwerte zu erhalten, für 180 die Zahlen 179 und 181 einsetzen, da er sich um einen Teil irren kann. Er erhält also für den oberen Grenzwert

$$E' = \frac{12243{,}6}{179} = 68{,}39.$$

und für den unteren Grenzwert

$$E'' = \frac{12243{,}6}{181} = 67{,}64.$$

Hierfür kann man in allgemeiner Übersicht schreiben

$$\left[\frac{12243{,}6}{180}\right]_{181}^{179} = \begin{cases} 68{,}40 \\ 68{,}02. \\ 67{,}64 \end{cases}$$

Die Differenz der Grenzwerte ist 68,40—67,64 = 0,76. Im ersten Fall war die Differenz der Grenzwerte = 2,27. Wir sehen also an diesem Zahlenbeispiel folgende Bezeichnung auftreten: Durch Vergrößern der Basis wird die Differenz der Grenzwerte verringert und hierdurch der Genauigkeitsgrad gesteigert.

Man kann nun, wie ich es in einer Programmabhandlung gezeigt habe, diese Sätze auch algebraisch darstellen und weitere Beziehungen erörtern; für vorliegenden Zweck wird diese Hinweisung genügen.

Zugleich folgt aus den dargelegten Beziehungen der Rat, nicht nur die ermittelten Höhen und Entfernungen, sondern auch ihre Grenzwerte zu berücksichtigen, damit der Messende sich darüber klar ist, daß er nicht unter gewissen Umständen unerfüllbare Anforderungen an das betreffende Verfahren stellt.

5. **Vervollständigung des Bildes; Vorbereitung zur Aufnahme; Berücksichtigung der Brennweite.** Um Horizontlinie und Vertikallinie zu zeichnen, sind folgende Vorkehrungen zu treffen. (Siehe Fig. V c, Grundriß und die sich ergebenden Bilder Fig. V a u. Fig. V b.)

Ein Punkt im Raum P sei an einer durch ihn gehenden Senkrechten markiert und werde auf p_1 und p_2 abgebildet.

Durch ein Nivellierinstrument sei auf der Senkrechten, welche durch P geht, die Marke M in gleicher Höhe der Projektionszentra O_1 und O_2 sichtbar markiert. Strecke MP sei $= 3$ m ermittelt. Ferner sei die Basis $O_1O_2 = 2$ m.

Errichtet man auf den photographischen Bildlinien m_1p_1 und m_2p_2 Linien hh senkrecht zu m_1p_1 und m_2p_2, so stellen die Linien hh den Horizont dar. Um auch die Vertikallinie z. B. auf dem linken Bilde zu zeichnen, ist die Ermittelung des Augenpunktes a_1 nötig.

Hierzu bestimme man im Terraindreieck O_1O_2P mittelst des Winkelspiegels den Fußpunkt f des Lotes, welches von P auf O_1O_2 gefällt ist und messe die Strecken O_1f, O_2f aus. Es sei $O_1f = 0{,}75$ m, $O_2f = 1{,}25$ m. Die Höhe Pf wird $= E_0$ gesetzt. Nun denke man sich das Terraindreieck O_1O_2P vervollständigt. Man ziehe durch P eine Linie parallel O_1O_2 und denke sich in O_1 und O_2 Lote auf O_1 und O_2 errichtet, welche die durch P gezogene Parallele in V und W schneiden. Es ist $VP = O_1f$; $WP = O_2f$.

Nun ist a_1p_1 anzusehen als Bild der Linie VP; ferner ist m_1p_1 anzusehen als Bild der gedachten senkrechten Strecke MP. Die horizontale Linie VP und die vertikale Linie MP sind parallel der Bildfläche; folglich verhalten sich ihre perspektivischen Bilder zu einander ebenso wie die Linien selbst. Wir erhalten also zur Bestimmung des gesuchten Augenpunktes a_1 die Proportion

$$a_1m_1 : m_1p_1 = VP : MP$$

$$\text{oder } a_1m_1 : m_1p_1 = O_1f : MP$$

Hieraus folgt

$$a_1m_1 = m_1p_1 \frac{O_1f}{MP};$$

im gegenwärtigen Falle ist

$$a_1m_1 = m_1p_1 \frac{0{,}75}{3} \text{ oder}$$

$$a_1m_1 = 0{,}25 \,.\, m_1p_1.$$

Es wird also Punkt a_1 bestimmt, indem man eine Strecke $= 0{,}25\, m_1p_1$ von m_1 aus auf die Horizontallinie abträgt. Das im Endpunkt a auf hh errichtete Lot ist die Vertikallinie des Bildes, sie ist mit vv bezeichnet. Ebenso wird sie auf dem zweiten Bilde bestimmt.

$$\text{Dort ist } p_2 a_2 \text{ oder } m_2 a_2 = m_2 p_2 \frac{O_2 f}{MP}$$

$$\text{oder } m_2 a_2 = m_2 p_2 \frac{1{,}25}{3} = 0{,}416\ m_2 p_2.$$

Die Brennweite kann nach dem im ersten Aufsatze angegebenen Verfahren bestimmt werden.

Beide Vertikallinien sind als Bilder einer identischen Geraden in unendlicher Entfernung anzusehen.

Die Differenz der Entfernungen von Bildern identischer Punkte bis zu den Vertikallinien gibt ebenfalls die perspektivische Verschiebung des betreffenden Punktes an, wenn seine Bilder zu derselben Seite der Vertikallinie auf beiden Bildern liegen. Liegen die Bilder zu verschiedenen Seiten der Vertikallinie, so ist ihre perspektivische Verschiebung gleich der Summe ihrer Abstände von der Vertikallinie.

Anweisung zum praktischen Verfahren einer Aufnahme.

In bezug auf das praktische Verfahren einer Aufnahme durch Parallelverschiebung ist im wesentlichen folgendes zu sagen.

Bei Verschiebungen, wo die Basis 2 m beträgt, ist es von Vorteil, sich eines Brettes oder einer Bank von entsprechender Länge zu bedienen. Man visiert die Vorderwand der Kamera auf einen bestimmten fernen Richtpunkt R ein und stellt durch die Dosenlibelle die Kamera horizontal. Hierauf markiert man durch einen Strich die Entfernung von 2 m. Ferner bezeichnet man an einer senkrechten Linie die Länge der Basis von 2 m durch einen Papierstreifen oder Kreidestrich und mißt die Entfernung dieser Linie von der Basis; man bezeichnet sie mit E_0 und richtet es so ein, daß E_0 zwischen 20 und 30 m beträgt.

Diese sind die geringsten Vorbereitungen, welche getroffen werden müssen, um ein brauchbares Paar Bilder zu erhalten. Man kann alsdann die Längen senkrechter Linien und ihre Entfernung von der Standlinie mit dem den Verhältnissen nach erreichbaren Genauigkeitsgrade ermitteln.

Die Entfernung vom Projektionszentrum kann nach der im ersten Aufsatz angegebenen Art durch Ermittelung der hinzuzufügenden Prozentzahlen annähernd angegeben werden.

Zu bemerken ist, daß man die Länge des Basisbildes auch durch die Regeldetri berechnen kann, wenn man die Länge einer vorhandenen senkrechten Linie im Bilde kennt. Angenommen, die senkrechte Kante eines Gebäudes sei = 5 m; das Bild derselben sei = 16 mm. Die Verschiebung sei = 2 m. Bezeichnen wir die Verschiebungsstrecke mit Δ, so verhält sich $5:2 = 16:\Delta$,

$$\text{mithin ist } \Delta = \frac{16 \cdot 2}{5} \text{ oder } \Delta = 6{,}4.$$

Ist also eine geeignete senkrechte Linie vorhanden, so hat man die Länge derselben auszumessen und aus dem Bilde die Strecke Δ zu berechnen; außerdem ist die Entfernung dieser Senkrechten von der Basis zu messen und als E_0 in die Rechnung einzuführen; die berechnete Strecke Δ ist $= \Delta_0$ zu setzen.

Es kommt auf die Umstände an, ob man eine vorhandene Senkrechte benutzt oder an einem Stabe von genügender Länge die Strecke von 2 m markiert und den Stab senkrecht an geeigneter Stelle befestigt.

Der Kontrolle wegen ist es vorteilhaft, aber nicht notwendig, an mehreren senkrechten Linien in verschiedener Entfernung die Länge der Basis durch Kreidestriche oder Papierstreifen zu markieren.

Wer nun das Bild noch durch Horizontallinie und Vertikallinie vervollständigen will, markiert den Fußpunkt von E_0, wie Fig. Vc angegeben, mittelst des Winkelsspiegels und mißt die Segmente der Grundlinie O_1 und O_2. Außerdem markiert er mittelst eines Nivellierinstrumentes die Höhe des Linsenmittelpunktes an der Senkrechten in der Entfernung E_0 von der Basis.

Dann kann nach der soeben angegebenen Methode

Horizontlinie und Vertikallinie konstruiert werden; die Brennweite kann nach der im ersten Aufsatz angegebenen Methode ermittelt werden. Dieselbe ist dort mit e bezeichnet (s. Seite 118); es ergab sich die Gleichung

$$e = \frac{E_0}{B} \Delta_0.$$

Hier bezeichnet B die Länge einer senkrechten Linie, die möglichst groß angenommen wird, E_0 ist als Entfernung vom Projektionszentrum 20 m oder darüber anzunehmen, Δ_0 ist das Bild der Senkrechten B. Werden die auf Seite 123 des ersten Aufsatzes angegebenen Umstände berücksichtigt, so wird die Brennweite e mit genügender Genauigkeit für Parallelverschiebung ermittelt.

Wir haben bis jetzt die Annahme gemacht, daß wir mit einem beliebigen Apparat, dessen Brennweite uns unbekannt war, operiert haben. Wir werden dieses Verfahren befolgen, wenn wir Apparate verwenden, welche wir auf die Gegenstände nach unserem Auge durch passende Verschiebung der Mattscheibe einstellen. Nun gibt es aber eine Art Handkamera in Kastenform mit Magazinvorrichtung, wo die auf unendliche Entfernung eingestellten Platten sich in unveränderlicher Distanz, der Brennweite, vom Projektionszentrum entfernt befinden.

Der Besitzer eines solchen Apparates kann, wenn er die Brennweite e auf angegebene Art ermittelt hat, auf folgende Art operieren, um zunächst zu einer von ihm ausgemessenen Entfernung E eines Punktes von der Basis B die ihm zugehörige Verschiebung Δ zu finden.

Aus $e = \frac{E}{B} \Delta$ folgt $\Delta = e \frac{B}{E}$.

Für diesen Fall ist also das Bild einer Senkrechten von der Länge der Basis nicht nötig, um die Verschiebung Δ eines Anfangspunktes zu finden. Die durch e ermittelten zusammengehörigen Werte E und Δ führt man nun ihrer Bedeutung nach als E_0 und Δ_0 in die Beziehung $\frac{E}{E_0} = \frac{\Delta_0}{\Delta}$ ein, welche im ersten Aufsatz Seite 107 entwickelt ist.

Aus E_0, $\varDelta_0$ lassen sich nun die Verschiebungen aller anderen Punkte in angegebener Art bestimmen, sei es daß man aus dem ermittelten Werte von $\varDelta_0$ die Randlinien konstruiert, sei es daß man die Bilder nebeneinander legt und K nach der in diesem Aufsatz angegebenen Art berechnet und verwendet.

Ein Apparat, dessen Linse unveränderlich auf unendliche Entfernung eingestellt ist, ist also das bequemste Mittel, Längen senkrechter Linien und Höhen bei Ermittelung des Horizontes photogrammetrisch zu bestimmen.

6. Beziehungen zwischen Aufnahmen desselben Terrains bei verschiedener Basis. Werfen wir zum Schluß noch auf folgende Beziehungen den Blick, welche sich bei der Aufnahme durch Parallelverschiebung ergeben. Wir teilen, dem Sprachgebrauche entsprechend, das sich darbietende Bild zunächst in Vordergrund, Mittelgrund und Hintergrund. Zum Vordergrunde rechnen wir alle diejenigen Punkte, welche nur auf einem einzigen der photographisch aufgenommenen Bilder vorkommen. Sie sind für Meßzwecke unverwendbar.

Zum Mittelgrunde rechnen wir alle diejenigen Punkte, welche auf beiden Bildern vorkommen und die eine wahrnehmbare Verschiebung zeigen; zum Hintergrunde rechnen wir alle diejenigen Punkte, deren Verschiebung so gering ist, daß sie sich unserem Sinne entzieht. Wir rechnen hierzu alle Punkte, deren Verschiebung auf dem Bilde unter $^1/_{20}$ mm beträgt.

Der erste Punkt des Mittelgrundes möge als Pfortenpunkt des Mittelgrundes bezeichnet werden. Alle Punkte des Mittelgrundes weisen wahrnehmbare Verschiebungen auf; es empfiehlt sich aber, eine Grenze für die zur Messung tauglichen zu bestimmen, da bei zu geringer Verschiebung der Unterschied der Grenzwerte zu groß wird.

Nehmen wir an, die letzte Verschiebungsstrecke, welche zu Meßzwecken verwendet werden soll, werde $= 1{,}5$ mm gesetzt, so rechnen wir alle Punkte des Mittelgrundes, deren Verschiebung nicht unter 1,5 mm herabsinkt, zum Meßgrund. Den entferntesten Punkt des Meßgrundes bezeichnen wir als Endpunkt des Meßgrundes.

Ferner bezeichnen wir denjenigen Teil des Mittelgrundes als „stereoskopische Zone", der, unter das Stereoskop gebracht, für das Auge des Beobachters zu einem Bilde mit plastischer Wirkung verschmilzt.

Die Vereinigung zu einem Bilde findet auch bei den Punkten des Hintergrundes statt, aber ohne plastische Wirkung; soll dieselbe vorhanden sein, so muß die Verschiebung wahrnehmbar sein; d. h. die Punkte müssen sich im Mittelgrunde befinden.

Bei den meisten Stereoskopbildern beträgt die Verschiebung der vorderen Punkte 1—2 mm; es ist aber zu bemerken, daß man mittelst Parallelverschiebung bei beliebiger Basis Stereoskopbilder herstellen kann, wenn sich die aufgenommenen Punkte in der stereoskopischen Zone befinden. Da ergibt sich alsdann, daß Bildpunkte mit viel größerer Entfernung als 2 mm zu einem Bilde verschmelzen.

Ich beobachtete einmal, daß unter dem Stereoskop bei mir Bildpunkte verschmolzen, deren Entfernung 8 mm betrug.

Wenn es auch individuell verschieden sein mag, wie groß die Verschiebung sein darf, daß 2 Bilder zu einem einzigen verschmelzen, so kann man doch ein Durchschnittsmaß feststellen.

Und demnach können wir die stereoskopische Zone bei denjenigen Punkten beginnen lassen, deren perspektivische Verschiebung 8 mm beträgt; sie erstreckt sich von diesem Anfangspunkt bis zum Hintergrund.

Die Punkte des Hintergrundes zeigen keine unserem Sinne wahrnehmbare Verschiebung; nur der Verstand kann dieselbe berechnen, wenn ihre Entfernung von der Standlinie bekannt ist. Punkte und Linien des Hintergrundes bilden auf beiden Bildern kongruente Komplexe.

Vergegenwärtigen wir uns nun den Vorgang, welcher stattfindet, wenn wir eine Gegend zunächst durch eine Parallelverschiebung mit der Basis von 2 m aufnehmen und dann dieselbe Gegend mit einer zweiten Parallelverschiebung mit einer Basis von 6 m aufnehmen.

Es ist schon darauf hingewiesen, daß der Unterschied der Grenzwerte klein wird, der Genauigkeitsgrad bei größerer Basis also gesteigert wird. Es ist aber außerdem auf folgende Beziehungen zu achten.

Der Pfortenpunkt des Mittelgrundes weicht zurück. Wenn ein Punkt bei einem Bildformat von 9—12 cm 5 cm Verschiebung hat bei der ersten Aufnahme, so hat er bei der zweiten 15 cm Verschiebung. Er kann nicht mehr auf beiden Bildern vorkommen und gehört bei der zweiten Aufnahme zum Vordergrunde. Als Pfortenpunkt des Meßgrundes muß bei der zweiten Aufnahme ein Punkt dienen, dessen Entfernung von der Standlinie eine größere ist, als es bei der ersten Aufnahme der Fall war.

Während der Pfortenpunkt des Mittelgrundes zurückweicht, weicht gleichzeitig der Endpunkt des Meßgrundes zurück. Punkte, die bei der ersten Aufnahme im Hintergrunde außerhalb des Meßgrundes lagen, können bei der zweiten Aufnahme in den Meßgrund treten, da ihre Verschiebung eine größere geworden ist.

Punkte des Hintergrundes der ersten Aufnahme können bei der zweiten Aufnahme nach Umständen in die stereoskopische Zone oder in den Meßgrund treten.

Durch Vergrößerung der Basis wird also die Grenze der verschiedenen Gründe von vorn nach hinten verschoben.

Die Punkte des Hintergrundes werden als diejenigen bezeichnet, welche sich in unendlicher Ferne befinden.

Das Bild der Basis, welche wir uns an senkrechter Linie angebracht denken, gibt das Maß der perspektivischen Verschiebung an. Demnach rechnen wir bei der Parallelverschiebung einen Punkt zu den unendlich fernen Punkten, wenn das Bild der Länge der Basis, welche wir an ihm als senkrechte Linie angebracht denken, so klein wird, daß wir es nicht sinnlich wahrnehmen können.

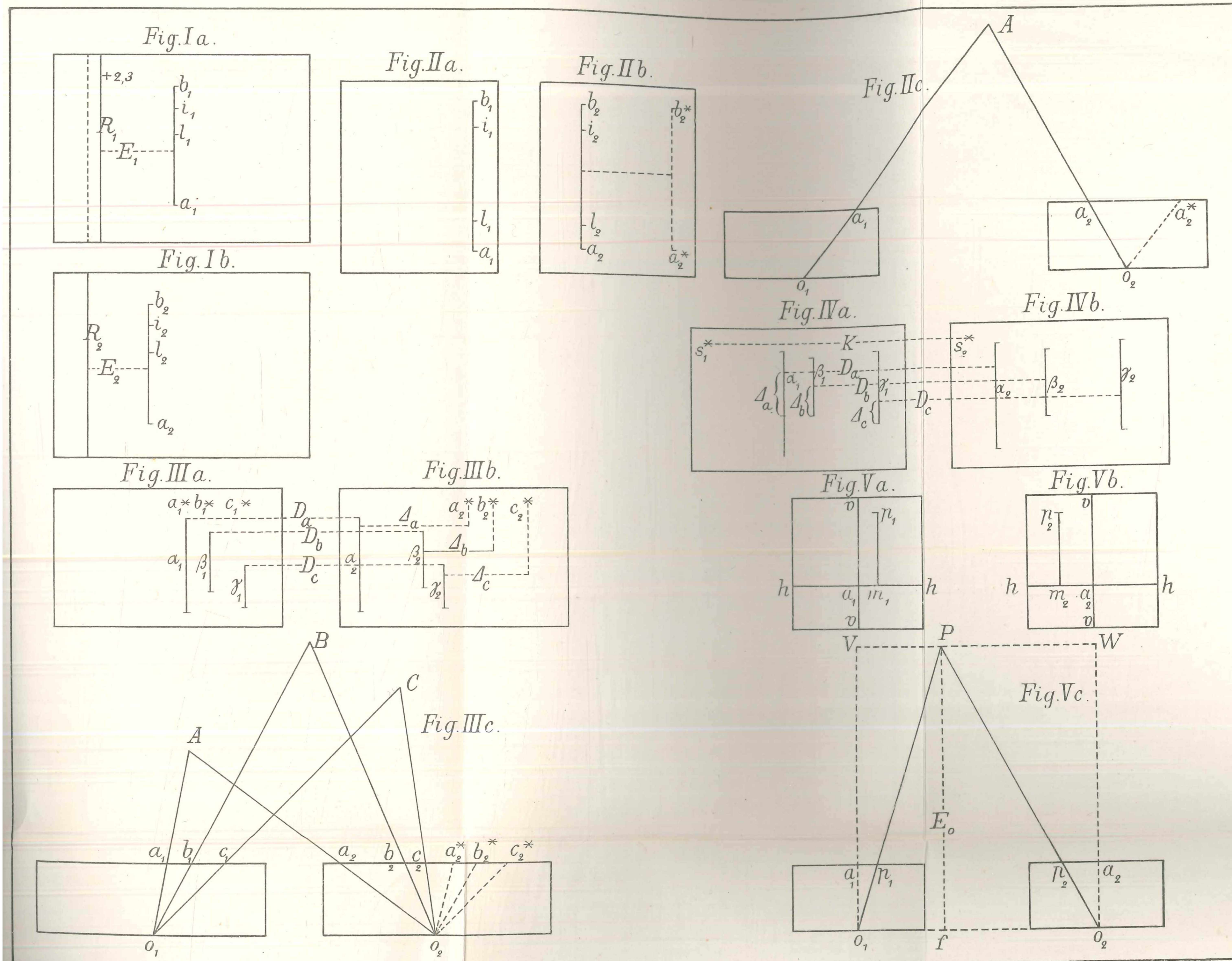
Fig. I a.
Fig. I b.
Fig. II a.
Fig. II b.
Fig. II c.
Fig. III a.
Fig. III b.
Fig. III c.
Fig. IV a.
Fig. IV b.
Fig. V a.
Fig. V b.
Fig. V c.

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande

Jahr/Year: 1905

Band/Volume: 62

Autor(en)/Author(s): Schönemann

Artikel/Article: Die Verwendung der einfachen Camera zur Ermittelung von Höhen und Entfernungen 147-166