© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Ueber das Passage-Instrument.

Von

Dr. Marian Koller,

k. k. Ministerialrath, Ehrenmitglied des Vereines.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 10. December.)

Vorwort.

Das Passage-Instrument findet in der practischen Astronomie hauptsächlich in zwei Lagen seine Anwendung, nämlich im Meridiane und im ersten Verticale. In beiden Lagen handelt es sich vorzugsweise um die Ausmittelung der Relation zwischen dem beobachteten Stundenwinkel eines Sternes am Mittelfaden und dem Stundenwinkel desselben Sternes in der optischen Achse des Fernrohres, wenn man sich das Passage-Instrument als vollkommen rectificirt und fehlerfrei aufgestellt denkt.

Es dürfte nicht ohne Interesse sein, die Aufgabe allgemeiner zu stellen, nämlich die Relation der genannten Stundenwinkel in einem beliebigen Azimuthe zu suchen und sie in einer zur Anwendung bequemen Form auszudrücken.

Der Lösung dieser Aufgabe ist der folgende Aufsatz gewidmet. Der Kürze bei Berufungen wegen sollen einige Probleme der sphärischen Astronomie vorausgeschickt werden.

1.

Bestimmung des Stundenwinkels, der Zenithdistanz und des parallactischen Winkels eines Sternes aus Azimuth, Declination und Polhöhe.

Denkt man sich ein Passage-Instrument fehlerfrei und so aufgestellt, dass die Drehungsaxe des Rohrs horizontal ist und sich in einem gegebenen Azimuthe befindet; dass ferner die zum Durchschnittspuncte des horizontalen mit dem verticalen Mittelfaden gerichtete Gesichtslinie mit der optischen Axe des

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Fernrohres, nämlich mit der Geraden zusammenfällt, die diesen Durchschnittspunct mit dem optischen Mittelpuncte des Objectives verbindet, so lässt sich, wenn

die Polhöhe des Beobachtungsortes . . . . . φ

„ Declination des Sternes . . . . . δ

das Azimuth des Südendes der Rotationsaxe des Fernrohres . k

bekannt sind;

der Stundenwinkel des Sternes . . . . . T

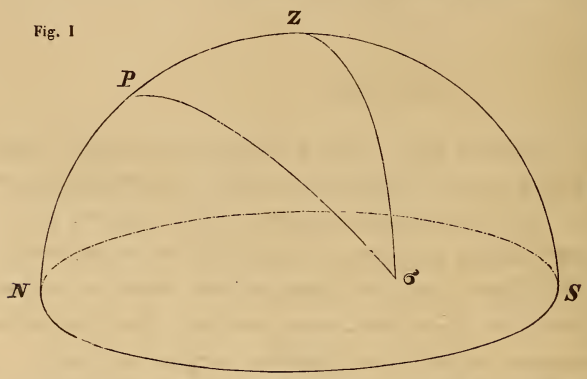
seine Zenithdistanz . . . . . Z und

sein parallactischer Winkel . . . . . ζ am

Mittelfaden oder (was hier gleichbedeutend ist) in der optischen Axe finden.

Denkt man sich die optische Axe bis zum scheinbaren Himmelsgewölbe verlängert, wo sie den in der optischen Axe (zugleich am Mittelfaden) stehenden Stern trifft, so bestimmen (Fig. I) der Weltpol P, das Zenith Z und der Stern σ auf der Himmelskugel ein Dreieck PZσ, in welchem die Seiten $PZ = 90^0 - \varphi$ und $P\sigma = 90^0 - \delta$ sind.

Fig. I



Nehmen wir an, es liegen Stern und Südende auf derselben Seite des Meridians; zählen wir ferner die Azimuthe und die Stundenwinkel vom südlichen Theile des Meridianes nach Ost und West bis 180^0, so ist

$$\angle\ SZ\sigma = 90^0 + k, \text{ also } \angle\ \sigma ZP = 90^0 - k,$$

(indem die optische Axe senkrecht auf der Drehungsaxe des Rohres steht) und

$$\angle\ ZP\sigma = T.$$

Es ist daher im Dreiecke PZσ

$$\text{tang } k \sin T = \text{tang } \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos T,$$

und wenn man den Hilfswinkel q mittelst der Gleichung $\text{tang } q = \sin \varphi \text{ cotang } k$ einführt

(1) . . . $\sin (T + q) = \dfrac{\sin q \text{ tang } \delta}{\text{tang } \varphi}$, aus weleher Gleichung sich T finden lässt.

Liegen Stern und Südende auf entgegengesetzten Seiten des Meridians, so ist

$$\angle\ SZ\sigma = 90^0 - k, \text{ also } \angle\ PZ\sigma = 90^0 + k$$

und wir haben in demselben Dreiecke, wie früher zur Bestimmung des Stundenwinkels $\sigma PZ = T$ die Gleichung

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$-\sin T \tang k = \tang \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos T,$$

und für denselben Hilfswinkel q

$$(2) \quad . \; . \; . \quad \sin (q - T) = \frac{\tang \delta \,.\, \sin q}{\tang \varphi}.$$

2.

Fortsetzung.

Bezeichnet Z die Zenithdistanz des Sternes in der optischen Axe, so ist $Z\sigma = Z$ und wir haben zur Bestimmung von Z

$$\cos Z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos T, \text{ oder}$$

$$(3) \quad . \; . \; . \quad \cos Z = \frac{\sin \varphi}{\cos p} \sin (\delta + p), \text{ für } \tang p = \cos T \,.\, \cotang \varphi.$$

Zur Berechnung von Z dient auch die Gleichung

$$(4) \quad . \; . \; . \quad \sin Z = \frac{\sin T \,.\, \cos \delta}{\cos k}.$$

Den parallactischen Winkel ζ findet man aus der Gleichung

$$\sin \zeta \tang k = \tang \delta \sin Z - \cos Z \cos \zeta,$$

wenn Stern und Südende auf derselben Seite des Meridianes, und aus

$$-\tang k \sin \zeta + \cos Z \cos \zeta = \tang \delta \sin Z,$$

wenn Stern und Südende an verschiedenen Seiten des Meridianes sich befinden.

Führt man den Hilfswinkel ϱ mittelst der Gleichung

$$\cotang \varrho = \cos Z \cotang k$$

ein, so gibt die erste der obigen Gleichungen

$$(5) \quad . \; . \; . \quad \cos (\zeta - \varrho) = \frac{\tang \delta \,.\, \cos \varrho}{\cotang Z}, \text{ und die zweite}$$

$$(6) \quad . \; . \; . \quad \cos (\zeta + \varrho) = \frac{\tang \delta \,.\, \cos \varrho}{\cotang Z}, \text{ zur Bestimmung von } \zeta.$$

Der Winkel ζ kann überdies auch mittelst der Gleichung

$$(7) \quad . \; . \; . \quad \sin \zeta = \frac{\cos \varphi \,.\, \cos k}{\cos \delta} \text{ gefunden werden.}$$

3.

Fehler des Instrumentes.

In der Regel lässt sich das Passage-Instrument nicht vollkommen genau rectificiren und nicht fehlerfrei, wie wir annahmen, aufstellen.

Man sucht zwar die Drehungsaxe des Rohres möglichst horizontal zu machen, dies gelingt jedoch nur angenähert, und es bleibt eine, wenn auch nur kleine Neigung derselben gegen den Horizont zurück.

Denkt man sich durch diese Axe einen Verticalkreis gelegt, so misst der zwischen dem Horizonte und dem Südende gelegene Bogen dieses Kreises die Neigung der Drehungsaxe. Wir wollen diese Neigung = b setzen.

Ebenso gelingt es nicht, den Mittelfaden genau in die durch die optische Axe gelegte Verticalebene zu bringen. Die übrigbleibende Abweichung des Mittelfadens von dieser Ebene wird durch den Winkel gemessen, welchen die zum Mittelfaden gerichtete Gesichtslinie mit der optischen Achse macht.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Diesen Winkel wollen wir mit c bezeichnen. Liegt der Mittelfaden südlich von der optischen Axe, so macht die Richtung der Drehungsaxe gegen das Südende mit der Gesichtslinie zum Mittelfaden einen Winkel $= 90^0 - c$; liegt der Mittelfaden nördlich von der optischen Axe, so ist dieser Winkel $= 90^0 + c$.

Ebenso kann die Einstellung der optischen Axe oder des Südendes in ein bestimmtes Azimuth nicht mit absoluter Schärfe geschehen, ohne dass ein Fehler, den wir mit Δ k bezeichnen wollen, zurückbleibt.

Vermöge dieser Fehler des Instrumentes hat der Stern am Mittelfaden nicht das gegebene Azimuth $90^0 + k$ oder $90^0 - k$, zugleich einen andern Stundenwinkel und Zenithdistanz, als die nach §. 1 für ein fehlerfreies Instrument berechneten Werthe von T und Z angegeben.

Bezeichnen wir den Stundenwinkel und die Zenithdistanz des Sternes am Mittelfaden mit t und z, und setzen

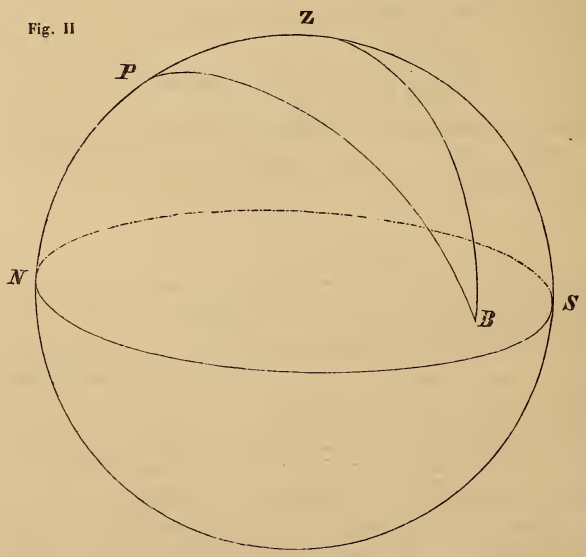
$$t = T - \Delta T; \; z = Z - \Delta Z,$$

so werden, wenn man (wie hier angenommen wird) b, c und Δ k möglichst klein gemacht hat, immerhin auch Δ T und Δ Z sehr kleine Grössen sein, so dass man bei den folgenden Untersuchungen die zweiten und höheren Potenzen von b, c, Δ k, Δ T und Δ Z so wie die Producte dieser Grössen vernachlässigen kann.

4.

Relation der sphärischen Coordinaten des Südendes auf das Zenith und den Pol bezogen.

Fig. II



Es sei in P (Fig. II) der Pol, in Z das Zenith und in B das Südende der Rotationsaxe des Fernrohres. Setzt man ferner

$PZ = 90^0 - \varphi$,

$PB = D$,

$ZB = 90^0 - b$,

das Azimuth des Südendes, nämlich $\angle SZB = k$, und seinen Stundenwinkel $BPS = E$, so gibt das Dreieck PZB folgende Relationen:

$$\cos D = \sin b \,.\, \sin \varphi - \cos b \cos \varphi \cos k$$
$$\sin D \sin E = \cos b \sin k$$
$$\sin D \cos E = \sin b \cos \varphi + \cos b \sin \varphi \cos k.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Aus diesen Gleichungen oder unmittelbar aus demselben Dreiecke BPZ ergeben sich ferner folgende Relationen:

$$\sin b = \cos D \sin \varphi + \sin D \cos \varphi \cos E,$$
$$\cos b \sin k = \sin D \sin E$$
$$\cos b \cos k = - \cos D \cos \varphi + \sin \varphi \sin D \cos E.$$

Ist b eine sehr kleine Grösse, so kann $\sin b = b$ und $\cos b = 1$ gesetzt werden, wo man dann folgende Relationen erhält:

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \cos D = b \,.\, \sin \varphi - \cos \varphi \cos k \\ \sin D \sin E = \sin k \\ \sin D \cos E = b \cos \varphi + \sin \varphi \cos k, \text{ und} \end{cases}$$

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} b = \cos D \sin \varphi + \sin D \cos \varphi \cos E \\ \sin k = \sin D \sin E \\ \cos k = - \cos D \cos \varphi + \sin D \sin \varphi \cos E. \end{cases}$$

Diese Relationen werden in der Folge ihre Anwendung finden.

5.

Relation zwischen den Winkeln T und t.

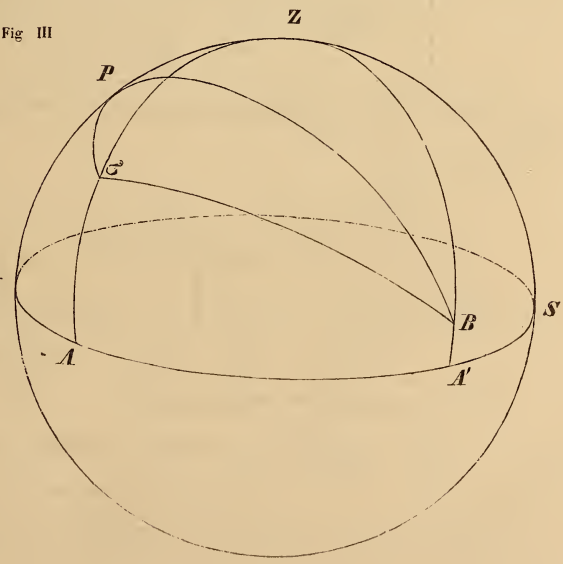
Wir wollen nun zu dem vorzüglichsten Probleme, das beim Passage-Instrumente zu lösen ist, nämlich zur Bestimmung der Relation schreiten, welche zwischen dem am Mittelfaden beobachteten Stundenwinkel t eines Sternes und seinem Stundenwinkel T in der optischen Axe stattfindet.

Wir nehmen an, es befinde sich Stern und Südende auf derselben Seite, und zwar beide westlich vom Meridiane.

Es sei (Fig. III) NZS der Meridian, NAS der Horizont, P der Pol Z das Zenith, φ die Polhöhe des Beobachtungsortes, somit $PZ = 90^0 - \varphi$.

Es sei ferner in B das Südende, in σ der Stern am Mittelfaden. Sind ZA u. ZA' die durch den Stern und das Südende gelegten Verticale, so ist $Z\sigma = z$, und wenn das Südende um den Winkel b über dem Horizonte steht $ZB = 90^0 - b$.

Fig III



© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Denken wir uns durch Stern und Südende die Stundenkreise, gelegt und es sei die Declination des Sternes $= \delta$, die Poldistanz des Südendes $= d$, so haben wir

$$P\sigma = 90^0 - \delta;\ PB = d.$$

Ferner sei der Stundenwinkel des Sternes am Mittelfaden, nämlich $\angle\ \sigma PZ = t$ und der Stundenwinkel des Südendes $\angle\ BPZ = \eta$, somit $\angle\ BP\sigma = t - \eta$.

Liegt endlich der Mittelfaden südlich von der optischen Achse, und legen wir durch B und σ einen grössten Kreis, so ist der Bogen $B\sigma = 90^0 - c$.

Wir haben nun im Dreiecke $BP\sigma$:

$$\cos(90^0 - c) = \sin c = \sin\delta \cos d + \cos\delta \sin d \cos(t - \eta).$$

Da c sehr klein ist, so kann man $\sin c = c$ setzen. Entwickelt man zugleich $\cos(t - \eta)$, so hat man

$$\text{(a)}\quad . \quad c = \sin\delta \cos d + \cos\delta \cos t \,.\, \sin d \cos\eta + \cos\delta \sin t \,.\, \sin d \sin\eta.$$

Nehmen wir das Azimuth des Südendes gleich $k + \Delta k$, so haben wir vermöge Gl. (8), §. 4

$$\text{(b)}\quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} \cos d &= b \,.\, \sin\varphi - \cos\varphi \cos(k + \Delta k), \\ \sin d \sin\eta &= \sin(k + \Delta k), \\ \sin d \cos\eta &= b \cos\varphi + \sin\varphi \cos(k + \Delta k). \end{aligned} \right.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung (a), so folgt

$$\begin{aligned} c = b\,[&\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t] \\ + \cos(k + \Delta k)\,[&- \sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos t] \\ + \sin(k + \Delta k) \,.\, &\cos\delta \sin t. \end{aligned}$$

Nun ist $\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \,.\, \cos t = \cos z$, somit auch

$$\text{(c)}\quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{c - b \cos z}{\cos(k + \Delta k)} - \sin t \cos\delta \,.\, \frac{\sin(k + \Delta k)}{\cos(k + \Delta k)} = \\ &\qquad = - \sin\delta \cos\varphi + \sin\varphi \cos\delta \cos t. \end{aligned} \right.$$

Wir haben nun (§. 3) $\cos z = \cos(Z - \Delta Z) = \cos Z + \Delta Z \,.\, \sin Z$, und mit Weglassung der kleinen Grössen höherer Ordnung (wie §. 3 bemerkt wurde) $b \cos z = b \cos Z$.

Es ist ferner

$$\frac{1}{\cos(k + \Delta k)} = \frac{1}{\cos k}\,(1 - \Delta k \,.\, \text{tang}\, k),$$

$$\sin(k + \Delta k) = \sin k\,(1 + \Delta k \,\text{cotang}\, k), \text{ folglich}$$

$$\frac{\sin(k + \Delta k)}{\cos(k + \Delta k)} = \text{tang}\, k \left[1 + \frac{\Delta k}{\sin k \cos k}\right], \text{ oder auch}$$

$$\frac{\sin(k \quad \Delta k)}{\cos(k + \Delta k)} = \text{tang}\, k + \frac{\Delta k}{\cos^2 k}.$$

Es folgt demnach aus Gleichung (c)

$$\text{(d)}\quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{c - b \cos Z}{\cos k} - \cos\delta \sin t \,.\, \text{tang}\, k - \cos\delta \sin t \,.\, \frac{\Delta k}{\cos^2 k} = \\ &\qquad = - \sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos t. \end{aligned} \right.$$

Im §. (1) und (2) wurde der Stundenwinkel eines Sternes σ im Azimuthe $90^0 + k$ mit T und seine Zenithdistanz mit Z bezeichnet.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Im Dreiecke, welches Pol, Zenith und Stern im genannten Azimuthe bilden, haben wir nun, $\sin Z \,.\, \sin k = \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos T$.

Addirt man diese Gleichung zur Gleichung (d), so folgt

$$\frac{c - b \cos Z}{\cos k} - \cos \delta \sin t \operatorname{tang} k - \cos \delta \sin t \frac{\Delta k}{\cos^2 k} +$$

$$+ \sin Z \sin k = \cos \delta \sin \varphi (\cos t - \cos T), \text{ somit}$$

$$(e) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} & 2 \cos \delta \sin \varphi \,.\, \sin \left(\frac{T - t}{2}\right) = \frac{c - b \cos Z}{\cos k \,.\, \sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} - \\ & - \frac{\sin t}{\sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} \left[\cos \delta \operatorname{tang} k + \cos \delta \,.\, \frac{\Delta k}{\cos^2 k}\right] + \\ & \qquad + \frac{\sin Z \,.\, \sin k}{\sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} . \end{aligned} \right.$$

Wir haben aber (§. 3)

$$t = T - \Delta T, \text{ also } \frac{t + T}{2} = T - \frac{\Delta T}{2}, \text{ und}$$

$$\sin t = \sin T (1 - \Delta T \operatorname{cotang} T),$$

$$\sin \left(\frac{t + T}{2}\right) = \sin T \left(1 - \frac{\Delta T}{2} \operatorname{cotang} T\right),$$

$$\frac{\sin t}{\sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} = 1 - \frac{\Delta T}{2} \operatorname{cotang} T.$$

Hieraus folgt

$$\frac{c - b \cos Z}{\cos k \,.\, \sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} = \frac{c - b \cos Z}{\cos k \cos T},$$

$$\frac{\sin t}{\sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} \left[\cos \delta \operatorname{tang} k + \cos \delta \,.\, \frac{\Delta k}{\cos^2 k}\right] = \cos \delta \operatorname{tang} k -$$

$$- \frac{\Delta T}{2} \cos \delta \operatorname{tang} k \operatorname{cotang} T + \cos \delta \,.\, \frac{\Delta k}{\cos^2 k};$$

$$\frac{\sin Z \sin k}{\sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} = \frac{\sin Z \sin k}{\sin T} \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \operatorname{cotang} T\right).$$

In dem oben betrachteten Dreiecke zwischen Pol, Zenith und Stern im Azimuthe $90^0 + k$ haben wir

$$\frac{\sin Z}{\sin T} = \frac{\cos \delta}{\cos k}, \text{ mithin auch}$$

$$\frac{\sin Z \,.\, \sin k}{\sin T} = \cos \delta \,.\, \operatorname{tang} k, \text{ mithin}$$

$$\frac{\sin Z \sin k}{\sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} = \cos \delta \operatorname{tang} k + \frac{\Delta T}{2} \cos \delta \operatorname{tang} k \operatorname{cotang} T.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Es folgt daher aus Gleichung (e)

$$\text{(f)} \quad \ldots \left\{ \begin{aligned} 2 \sin \left(\frac{T - t}{2}\right) &= \frac{c - b \cos Z}{\cos k \sin T \cos \delta \sin \varphi} + \\ + \Delta T \,.\, \frac{\operatorname{tang} k \operatorname{cotang} T}{\sin \varphi} &- \Delta k \,.\, \frac{1}{\cos^2 k \sin \varphi}. \end{aligned} \right.$$

Es ist aber $\cos \delta \sin T = \sin Z \cos k$, folglich auch

$\cos \delta \sin T \cos k \sin \varphi = \sin Z \sin \varphi \cos^2 k$; ferner ist

$$\frac{\operatorname{tang} k \operatorname{cotang} T}{\sin \varphi} = \frac{\sin k \cos T}{\sin \varphi \cos k \sin T},$$

$$\text{und da } \sin T = \frac{\sin Z \cos k}{\cos \delta},$$

$$\text{auch } \frac{\operatorname{tang} k \operatorname{cotang} T}{\sin \varphi} = \frac{\sin k \cos \delta \cos T}{\sin Z \sin \varphi \cos^2 k}.$$

Aus der Gleichung (f) folgt daher

$$\text{(g)} \quad \ldots \quad 2 \sin \left(\frac{T - t}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2 k \sin \varphi} \left(\frac{c - b \cos Z}{\sin Z} - \Delta k + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos \delta \sin k \cos T}{\sin Z} \,.\, \Delta T\right).$$

6.

Fortsetzung.

In dem zweiten Theile der soeben gefundenen Gleichung ist noch ΔT unbekannt. Diese Grösse kann auf folgende Weise gefunden werden.

Wir suchen zuerst das Azimuth SZA (Fig. III) des Sternes am Mittelfaden. Im Dreiecke σBZ haben wir

$$\cos B\sigma = \sin c = \sin b \cos z + \cos b \sin z \,.\, \cos \sigma ZB,$$

und da c und b sehr kleine Grössen sind,

$$c = b \cos z + \sin z \cos \sigma ZB, \text{ also } \cos \sigma ZB = \frac{c - b \cos z}{\sin z}.$$

Diesem Ausdrucke zufolge ist $\cos \sigma ZB$ eine kleine Grösse, mithin

$$\angle \sigma ZB = \angle AZA' \text{ nahe } = 90^0.$$

Setzen wir $\angle AZA' = 90^0 - \mu$, so haben wir

$$\cos \sigma ZB = \cos (90^0 - \mu) = \sin \mu = \mu, \text{ demnach}$$

$$\mu = \frac{c - b \cos z}{\sin z} \text{ und}$$

$$\angle AZA' = 90^0 - \left[\frac{c - b \cos z}{\sin z}\right].$$

Nun ist $\angle A'ZS = k + \Delta k$, also das Azimuth des Sternes am Mittelfaden, nämlich $\angle AZS = 90^0 + k + \Delta k - \left[\frac{c - b \cos z}{\sin z}\right]$.

Da das Azimuth des Sternes bei fehlerfreiem Instrumente $= 90^0 + k$ ist, so folgt die Differenz der Azimuthe eines Sternes σ, wenn er bei einem

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

fehlerfreien Instrumente in der optischen Axe oder — wenn das Instrument mit den betrachteten Fehlern behaftet ist — am Mittelfaden sich befindet, gleich

$$\Delta\, k - \left[\frac{c - b \cos z}{\sin z}\right].$$

Wir wollen diese Azimuthaldifferenz, die in der Regel eine kleine Grösse sein wird, mit dA bezeichnen, so dass

$$\text{(h)} \quad . \; . \; . \quad dA = \Delta\, k - \left[\frac{c - b \cos z}{\sin z}\right].$$

Es lässt sich nun die Aenderung der Zenithdistanz eines Sternes finden, im Falle sich sein Azimuth A um eine kleine Grösse dA geändert hat.

In dem mehrerwähnten Dreiecke ist

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos Z - \cos \varphi \sin Z \,.\, \cos A.$$

Für kleine Aenderungen der Grössen Z und A folgt daraus

$$o = - dZ\, [\sin \varphi \sin Z + \cos \varphi \cos A \cos Z]$$
$$+ \cos \varphi \sin Z \sin A \,.\, dA.$$

Setzen wir den parallactischen Winkel des Sternes $= \zeta$, so ist in diesem Dreiecke

$$\cos \delta \cos \zeta = \sin \varphi \sin Z + \cos \varphi \cos Z \,.\, \cos A, \text{ und}$$
$$\cos \varphi \sin A = \cos \delta \sin \zeta, \text{ also}$$
$$o = - dZ \,.\, \cos \zeta + dA \,.\, \sin Z \sin \zeta, \text{ mithin}$$

$$\text{(i)} \quad . \; . \; . \quad dZ = dA \,.\, \sin Z \operatorname{tang} \zeta,$$ somit ist auch dZ, sowie dA in der Regel eine sehr kleine Grösse.

Wir haben (vermöge §. 3) nun $z = Z - \Delta Z$, also $z = Z + dZ = Z - \Delta Z$, mithin $\Delta Z = - dZ = - dA \,.\, \sin Z \,.\, \operatorname{tang} \zeta$; da ferner $\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sin [Z - \triangle Z]} = \frac{1}{\sin Z} [1 + \Delta Z \,.\, \operatorname{cotang} Z]$, so haben wir $\frac{c - b \cos z}{\sin z} = \frac{c - b \,.\, \cos Z}{\sin Z}$, wo Z die Zenithdistanz des Sternes im Azimuthe $90^0 + k$ ist. Wir haben daher auch

$$\text{(k)} \quad . \; . \; . \quad dA = \Delta\, k - \left(\frac{c - b \cos Z}{\sin Z}\right).$$

Um die Aenderung des Stundenwinkels T zu finden, welche der Azimuthaländerung dA entspricht, differenzirt man die Gleichung $\sin T \cos \delta = \sin A \sin Z$ nach T, A und Z, welche sich zugleich ändern. Man hat

$$dT \cos T \cos \delta = dA \,.\, \cos A \sin Z + dZ \,.\, \sin A \cos Z, \text{ oder}$$

$dT \,.\, \cos T \cos \delta = dA \,.\, \sin Z\, [\cos A + \sin A \cos Z \operatorname{tang} \zeta]$, und da $\cos T = \cos A \cos \zeta + \sin A \sin \zeta \cos Z$ ist, auch

$$dT = \frac{dA \,.\, \sin Z}{\cos \delta \cos \zeta}, \text{ oder (Gl. (k)}$$

$$\text{(l)} \quad . \; . \; . \quad dT = \frac{1}{\cos \delta \cos \zeta} \left(\Delta\, k \,.\, \sin Z - c + b \cos Z\right).$$

Da $t = T + dT$ und in (§. 3) $t = T - \Delta T$ gesetzt wurde, so folgt

$$\text{(m)} \quad . \; . \; . \quad \Delta T = \frac{1}{\cos \delta \cos \zeta} \left[c - b \cos Z - \Delta\, k \,.\, \sin Z\right].$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Setzt man diesen Werth für $\varDelta$ T in die Gleichung (g), so erhält man

$$2 \sin\left(\frac{T-t}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2 k \sin\varphi}\left(1+\frac{\sin k \cos T}{\cos\zeta}\right)\left[\frac{c-b.\cos Z}{\sin Z} - \varDelta k\right].$$

Da $\frac{T-t}{2}$ ein sehr kleiner Winkel sein wird, so folgt auch

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad T = t + \frac{1}{\cos^2 k \sin\varphi}\left(1+\frac{\sin k \cos T}{\cos\zeta}\right)\left[\frac{c-b\cos Z}{\sin Z} - \triangle k\right].$$

Diese Gleichung gibt die gesuchte Relation zwischen den Stundenwinkeln T und t.

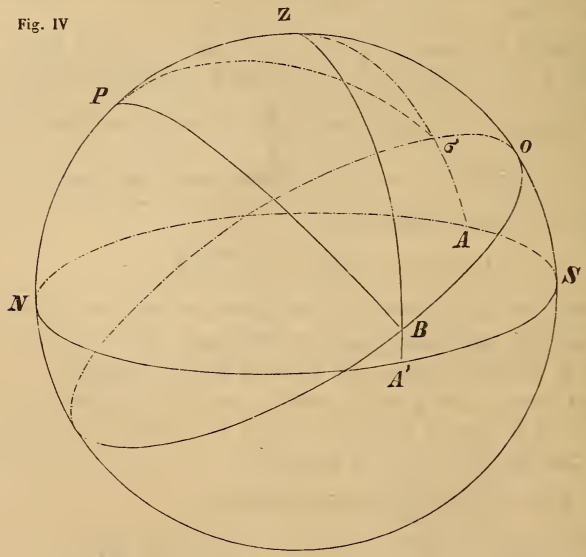
Wir haben in dieser Entwickelung Stern und Südende westlich vom Meridiane angenommen. Ganz denselben Ausdruck finden wir auch, wenn sich Stern und Südende östlich vom Meridiane befinden.

7.

Schluss.

Liegen Südende und Stern auf verschiedenen Seiten des Meridianes, und zwar (um einen bestimmten Fall zu haben) das Südende westlich in B und der Stern östlich in σ (Fig. IV).

Fig. IV



Es sei ferner, wie früher $ZB = 90^0 - b$, $P\sigma = 90^0 - \delta$, $PZ = 90^0 - \varphi$, $Z\sigma = z$, $PB = d$, $\angle \sigma PZ = t$, $\angle BPZ = \eta$, der Bogen $BO\sigma = 90^0 - c$ und $\angle A'ZS = k + \triangle k$. Im Dreiecke $BP\sigma$, wo der Winkel $\sigma PB = t + \eta$ ist, hat man $\sin c = \sin\delta \cos d + \cos\delta \sin d \cos(t+\eta)$ oder

$$c = \sin\delta \cos d + \cos\delta \cos t \,.\, \sin d \cos\eta - \cos\delta \sin t \,.\, \sin\eta \sin d.$$

Substituirt man für $\cos d$, $\sin d \cos\eta$ und $\sin\eta \sin d$ aus den Gleichungen (b), so findet man $c - b \cos z = \cos(k + \varDelta k)(-\sin\delta \cos\varphi + \cos\delta \sin\varphi \cos t) - \cos\delta \sin t \sin(k + \varDelta k)$.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Aus dieser Gleichung ergibt sich, wie oben,

$$(n) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{c - b \cos Z}{\cos k} + \cos \delta \sin t \operatorname{tang} k + \cos \delta \sin t \,.\, \frac{\varDelta k}{\cos^2 k} = \\ &= - \sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi \cos t. \end{aligned} \right.$$

Für den vorliegenden Fall haben wir im Dreiecke: Pol, Zenith und Stern m Azimuthe $90^0 - k$, $- \sin Z \sin k = \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos T$.

Addirt man diese Gleichung zur Gleichung (n), so hat man

$$2 \cos \delta \sin \varphi \sin \left(\frac{T - t}{2}\right) = \frac{c - b \cos Z}{\cos k \sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} +$$

$$+ \frac{\sin t}{\sin \left(\frac{t + T}{2}\right)} \left[\cos \delta \operatorname{tang} k + \cos \delta \,.\, \frac{\varDelta k}{\cos^2 k}\right] -$$

$$- \frac{\sin Z \,.\, \sin k}{\sin \left(\frac{t + T}{2}\right)}.$$

Hieraus folgt

$$2 \cos \delta \sin \varphi \,.\, \sin \left(\frac{T - t}{2}\right) = \frac{c - b \,.\, \cos Z}{\cos k \sin T} +$$

$$+ \cos \delta \quad \frac{\varDelta k}{\cos^2 k} - \cos \delta \,.\, \operatorname{tang} k \operatorname{cotang} T \,.\, \varDelta T, \text{ oder}$$

$$2 \sin \left(\frac{T - t}{2}\right) = \frac{c - b \cos Z}{\cos k \sin T \cos \delta \sin \varphi} + \frac{\varDelta k}{\cos^2 k \sin \varphi} -$$

$$- \triangle T \,.\, \frac{\operatorname{tang} k \,.\, \operatorname{cotang} T}{\sin \varphi}, \text{ oder}$$

$$(o) \,.\, 2 \sin \left(\frac{T - t}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2 k \sin \varphi} \left[\frac{c - b \cos Z}{\sin Z} + \varDelta k - \varDelta T \,.\, \frac{\cos \delta \sin k \cos T}{\sin Z}\right].$$

Im Dreiecke $\sigma Z B$ findet man auf demselben Wege (wie §. 6)

$\angle A'ZA = 90^0 - \left(\frac{c - b \cos Z}{\sin Z}\right)$; da nun $\angle A'ZS = k + \varDelta k$, so ist

$\angle AZS = 90^0 - k - \left[\frac{c - b \cos Z}{\sin Z} + \varDelta k\right]$.

Nach den Bezeichnungen des vorigen Paragraphes haben wir für unsern Fall $A = 90^0 - k$, $dA = - \left(\frac{c - b \cos Z}{\sin Z} + \varDelta k\right)$,

und $dT = - \frac{1}{\cos \delta \cos \zeta} \left[c - b \cos Z + \varDelta k \,.\, \sin Z\right]$, mithin wegen

$$dT = - \varDelta T,$$

$$\varDelta T = \frac{1}{\cos \delta \cos \varphi} \left[c - b \cos Z + \triangle k \,.\, \sin Z\right].$$

Wird dieser Werth von $\varDelta T$ in die Gleichung (o) gesetzt, so findet man

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad T = t + \frac{1}{\cos^2 k \sin \varphi} \left(1 - \frac{\sin k \cos T}{\cos \zeta}\right) \left[\frac{c - b \cos Z}{\sin Z} + \varDelta k\right].$$

Denselben Ausdruck erhält man auch, wenn das Südende östlich und der Stern westlich vom Meridiane gelegen ist.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die erhaltene Gleichung gibt demnach die Relation zwischen dem Stunden winkel T eines Sternes im Azimuthe 90^0 — k bei fehlerfreiem Instrumente und dem Stundenwinkel desselben Sternes am Mittelfaden, wie er sich durch die Beobachtung an demselben mit kleinen Fehlern behafteten Instrumente ergibt.

8.

Zusammenstellung der erhaltenen Resultate.

In den §§. 5, 6 und 7 wurde angenommen, dass das Südende der Rotationsachse sich über dem Horizonte befindet.

Wäre dieses Ende unter dem Horizonte, so muss in den Gleichungen (10) und (11) b mit entgegengesetzten Zeichen genommen werden. Dasselbe findet auch bei c Statt, wenn der Mittelfaden nicht, wie wir annahmen, südlich sondern nördlich von der optischen Axe liegt, demnach der Bogen

$$B\sigma = 90^0 + c \text{ ist.}$$

Von der Wahrheit des Gesagten kann man sich auch durch unmittelbare Entwickelung der Werthe von T für die verschiedenen Fälle überzeugen.

Wir haben demnach:

a) Wenn Stern und Südende auf derselben Seite des Meridianes sich befinden:

$$(12) \quad . \quad . \quad T = t + \frac{1}{\cos^2 k \sin \varphi} \left(1 + \frac{\sin k \cos T}{\cos \zeta}\right) \left[\frac{\pm c \mp b \cos Z}{\sin Z} - \Delta k\right].$$

b) Wenn Stern und Südende auf entgegengesetzten Seiten des Meridianes stehen:

$$(13) \quad . \quad . \quad T = t + \frac{1}{\cos^2 k \sin \varphi} \left(1 - \frac{\sin k \cos T}{\cos \zeta}\right) \left[\frac{\pm c \mp b \cos Z}{\sin Z} + \Delta k\right].$$

In diesen Gleichungen sind die obern Zeichen zu nehmen:

bei c, wenn der Mittelfaden südlich von der optischen Axe,

bei b, wenn das Südende über dem Horizonte steht.

Hat man die Uhrzeit τ des Durchganges des Sternes durch den Mittelfaden beobachtet und ist die Correction der Uhr gegen Sternzeit gleich $\Delta \tau$, so ist $\tau + \Delta \tau$ die Sternzeit der Beobachtung. Ist ferner die gerade Aufsteigung des beobachteten Sternes gleich α, so ist:

für westliche Sterne $t = (\tau + \Delta \tau) - \alpha$,

„ östliche Sterne $t = \alpha - (\tau + \Delta \tau)$.

Wir haben daher:

A. Wenn Stern und Südende auf derselben Seite des Meridianes liegen:

$$(14) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \text{1. für westliche Sterne:} \\ \quad T = (\tau + \Delta \tau) - \alpha \\ + \dfrac{1}{\cos^2 k \sin \varphi} \left[1 + \dfrac{\sin k \cos T}{\cos \zeta}\right] \left(\dfrac{\pm c \mp b \cos Z}{\sin Z} - \Delta k\right) \\ \text{2. für östliche Sterne:} \\ \quad T = \alpha - (\tau + \Delta \tau) \\ + \dfrac{1}{\cos^2 k \sin \varphi} \left(1 + \dfrac{\sin k \cos T}{\cos \zeta}\right) \left[\dfrac{\pm c \mp b \cos Z}{\sin Z} - \Delta k\right] \end{cases}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

B. Wenn Stern und Südende auf entgegengesetzten Seiten des Meridianes liegen:

$$(15) \quad \ldots \quad \begin{cases} \text{1. für westliche Sterne:} \\ T = (\tau + \varDelta\tau) - \alpha \\ + \dfrac{1}{\cos^2 k \sin q}\left[1 - \dfrac{\sin k \cos T}{\cos \zeta}\right]\left(\dfrac{\pm c \mp b \cos Z}{\sin Z} + \varDelta k\right), \\ \text{2. für östliche Sterne:} \\ T = \alpha - (\tau + \varDelta\tau) \\ + \dfrac{1}{\cos^2 k \sin q}\left(1 - \dfrac{\sin k \cos T}{\cos \zeta}\right)\left[\dfrac{\pm c \mp b \cos Z}{\sin Z} + \varDelta k\right]. \end{cases}$$

Bezüglich der Zeichen von b und c gilt das früher Gesagte.

9.

Reduction der Seitenfäden auf den Mittelfaden.

Um die Uhrzeit τ eines Sternes am Mittelfaden mit möglichster Schärfe zu erhalten, beobachtet man auch die Antrittszeiten desselben an den Seitenfäden und reducirt sie auf den Mittelfaden.

Dieses kann, wenn (wie hier vorausgesetzt wird) die Abstände der Seitenfäden vom Mittelfaden bekannt sind, auf folgende Weise geschehen:

Es sei der Abstand eines Seiten- vom Mittelfaden $= f$, und es seien beide Fäden südlich von der optischen Axe gelegen. Bezeichnet man den Stundenwinkel des Sternes am Mittelfaden mit t, am Seitenfaden mit t′ und befinden sich Stern und Südende auf verschiedenen Seiten des Meridianes, so hat man im Dreiecke:

Pol, Stern am Seitenfaden und Südende

$$\cos(90^0 - c - f) = \sin(c + f) = \sin\delta \cos d + \cos\delta \sin d \cos(t' + \eta);$$

und für den Stern am Mittelfaden

$$\sin c = \sin\delta \cos d + \cos\delta \sin d \cos(t + \eta).$$

Die Differenz dieser Gleichungen gibt: $2 \sin\frac{f}{2} \cdot \cos\left(c + \frac{f}{2}\right) =$

$$= 2 \cos\delta \sin d \sin\left(\frac{t - t'}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{t + t'}{2} + \eta\right).$$

Da c ein sehr kleiner Winkel ist, so hat man

$$\cos\left(c + \frac{f}{2}\right) = \cos\frac{f}{2}, \text{ und somit}$$

$$(p) \quad \ldots \quad 2 \sin\left(\frac{t - t'}{2}\right) = \frac{\sin f}{\cos\delta \sin d \sin\left(\frac{t + t'}{2} + \eta\right)}.$$

Da $\frac{t - t'}{2}$ und f in der Regel sehr kleine Bögen sind, so kann man $\sin\left(\frac{t - t'}{2}\right) = \frac{t - t'}{2}$ und $\sin f = f$ setzen, und es folgt demnach auch

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

(q) . . . $t - t' = \frac{f}{\cos \delta \sin d \sin (\Theta + \eta)}$, wenn man zur Abkürzung $\frac{t + t'}{2}$ mit Θ bezeichnet.

Mittelst dieser Gleichungen findet man $(t - t')$ nämlich den Unterschied der Stundenwinkel an den beiden Fäden, oder (was gleichbedeutend ist) das Zeitintervall in Sternzeit zwischen den Durchgängen des Sternes durch die fraglichen Fäden, wenn ausser f und δ (die als bekannt vorausgesetzt werden) auch t, t', d und η gegeben sind.

Ist die Correction der Uhr gegen Sternzeit nahezu bekannt, so kennt man auch t und t' (da man die gerade Aufsteigung des Sternes als gegeben annimmt), somit auch $\frac{t + t'}{2} = \Theta$.

Da jedoch auch $\Theta = t - \left(\frac{t - t'}{2}\right)$, so kann man für $\frac{t - t'}{2}$ die halbe Zwischenzeit zwischen den Durchgängen des Sternes am Mittel- und an Seitenfaden nehmen.

Die Grössen d und η findet man aus den Gleichungen (b) §. 5, wo l durch unmittelbares Nivelliren der Rotationsaxe des Fernrohres und Δ k (wie wir später zeigen werden) durch Beobachtung der Durchgänge geeigneter Sterne durch den Vertical Z A bestimmt werden kann, und die Polhöhe φ als angenähert bekannt gesetzt wird.

10.

Fortsetzung.

Es ist zur Beschleunigung und Vereinfachung der Rechnung von Wichtigkeit zu wissen, ob und unter welchen Umständen es gestattet sei, von diesen strengen Formeln abzusehen, und t — t' mit Vernachlässigung der Fehler l und Δ k zu suchen.

Setzt man b und Δ k gleich Null und setzt die dieser Annahme entsprechenden Grössen d und η beziehungsweise gleich d' und η', so hat man aus den Gleichungen (8)

$$(q') \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} \cos d' = - \cos \varphi \cos k, \\ \sin d' \sin \eta' = \sin k, \\ \sin d' \cos \eta' = \sin \varphi \cos k. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen dient zur Bestimmung von d'; die zweite und dritte Gleichung mit einander verbunden geben $\tang \eta' = \frac{\tang k}{\sin \varphi}$, woraus man η' berechnen kann. Diese Grösse findet man überdies auch (vermöge der ersten der Gleichungen (9) §. 4) aus $\cos \eta' = - \tang \varphi \,.\, \cotang d'$.

In welchem Quadranten d' und η' zu nehmen sein werden, kann nicht zweifelhaft sein, wenn man sich erinnert, dass ihre Werthe innerhalb der Grenzen 0^0 und 180^0 liegen müssen.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Setzt man statt d und η in die Gleichung (q) die Grössen d' und η', so erhalten wir für t — t' einen genäherten Werth, den wir mit l' bezeichnen wollen, mittelst der Gleichung

$$\text{(r)} \quad . \quad . \quad . \quad l' = \frac{f}{\cos \delta \sin d' \sin (\Theta + \eta')} .$$

Nennen wir den nach den strengen Formeln (p) oder (q) berechneten Werth von (t — t') gleich l und ist

$$l = l' + \Delta l', \text{ so folgt}$$

$$l' + \Delta l' = \frac{f}{\cos \delta \sin (d' + \Delta d') \sin (\Theta + \eta' + \Delta \eta')},$$

wo $d = d' + \Delta d'$ und $\eta = \eta' + \Delta \eta'$.

Da wegen der sehr kleinen Grössen b und Δ k auch Δ d' und $\Delta \eta'$ sehr klein sein werden, so hat man

$$l' + \Delta l' = l' - l' [\Delta d' . \text{cotang } d' + \Delta \eta' \text{ cotang } (\Theta + \eta')],$$

$$\text{(s)} \quad . \quad . \quad . \quad \text{also } \Delta l' = - l' [\Delta d' . \text{cotang } d' + \Delta \eta' \text{ cotang } (\Theta + \eta')],$$

als den Werth, um welchen l durch die Gleichung (r) fehlerhaft gefunden wird.

In der Gleichung (s) sind die Werthe von Δ d' und $\Delta \eta'$ zu bestimmen.

Differenzirt man die erste der Gleichungen (8) nach b und k, so hat man

$$- d D . \sin D = d b \sin \varphi + \cos \varphi . \sin k . d k.$$

Setzen wir in der Gleichung

$$\cos D = b \sin \varphi - \cos \varphi \cos k$$

den ursprünglichen Werth von b, der in b + db überging, gleich o, so wird D = d', dD = dd' = Δd' und dk = Δk. Nimmt man überdies statt db die Bezeichnung b, indem wir die Neigung der Rotationsachse, welche hier = db ist, überhaupt mit b ausdrücken, so haben wir

$$\text{(t)} \quad . \quad . \quad . \quad \Delta d' = - \left[\frac{b . \sin \varphi}{\sin d'} + \frac{\Delta k . \cos \varphi \sin k}{\sin d'} \right].$$

Die zweite der oben gefundenen Gleichungen (q')) gibt ferner

$$\text{(u)} \quad . \quad . \quad . \quad \Delta \eta' = \Delta k . \frac{\cos k}{\cos \eta' \sin d'} - \Delta d' . \frac{\text{cotang } d'}{\text{cotang } \eta'} .$$

Diese beiden Gleichungen dienen zur Bestimmung der Werthe von Δ d' und $\Delta \eta'$. Sind diese bestimmt, so ist auch Δ l' bekannt, somit kann auch entschieden werden, ob und innerhalb welcher Gränzen der Declinationen der Sterne die Formel (r) gebraucht werden kann, und eben so lässt sich mittelst der Formel (s), wenn das gefundene l' einer Correction bedarf, die Letztere finden.

Es darf wohl nicht eigens bemerkt werden, dass in der Gleichung (s) die Grössen Δd' und Δk in Theilen des Halbmessers auszudrücken sind.

Für den speziellen Fall, wenn k = o, nämlich wenn sich die optische Achse des Rohres im ersten Verticale befindet, ist

$$\cos d' = - \cos \varphi, \text{ also}$$

$$d' = 180^0 - \varphi \text{ und } \sin d' = \sin \varphi; \ \eta' = o;$$

$$\Delta d' = - b, \ \Delta \eta' = \frac{\Delta k}{\sin \varphi} = \Delta k . \text{cosec } \varphi; \text{ mithin}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$(v) \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} l' = \dfrac{f}{\cos\delta \sin\varphi \sin\Theta} \text{ und} \\ \Delta l' = -l' \left[\Delta k \operatorname{cotang}\Theta \operatorname{cosec}\varphi - b \,.\, \operatorname{cotang}\varphi\right]. \end{cases}$$

11.

Schluss.

Hat man die Antrittszeit am Mittelfaden nicht beobachtet, ist also t unbekannt, so wird man für die erste Annäherung $t = t'$ setzen und aus

$$l' = \frac{f}{\cos\delta \sin d' \sin(t' + \eta')}$$

einen genäherten Werth für $t - t'$ suchen. Aus $t - t' = l'$ folgt nun

$$t = t' + l' \text{ und } \frac{t + t'}{2} = t' + \frac{l'}{2} = \Theta.$$

Mit diesem Werthe von Θ berechne man nun den genaueren Werth von l', und im Erfordernissfalle auch $\Delta l'$, woraus sich dann der gesuchte Werth l ergibt.

Ganz analog wird man vorgehen, wenn man den Mittelfaden auf die optische Axe reduziren, nämlich aus dem bekannten Stundenwinkel t am Mittelfaden den Stundenwinkel in der optischen Achse finden will. Hier wird der Mittelfaden als ein Seitenfaden betrachtet, dessen Abstand von der optischen Axe = c ist. Man wird daher in unserer letzten Gleichung statt t' die Grösse t und c statt f zu setzen haben.

Der Vollständigkeit wegen müssen wir noch des in der Praxis wohl selten vorkommenden Falles erwähnen, dass die Correction der Uhr gar nicht oder zu ungenau bekannt ist, um mittelst derselben die Stundenwinkel t und t' mit der zur Berechnung von l nöthigen Sicherheit angeben zu können.

In diesem Falle setze man annäherungsweise

$$\frac{t + t'}{2} = \Theta = T \text{ und suche } l' \text{ aus}$$

$$l' = \frac{f}{\cos\delta \sin d' \sin(T + \eta')}.$$

Das gefundene $l' = t - t'$ gesetzt gibt

$$t' = t - l' = T - l', \text{ und } \frac{t + t'}{2} = T - \frac{l'}{2} = \Theta,$$

mit welchem Werthe von Θ man einen ferneren genäherten Werth von $t - t'$ sucht und so, wenn erforderlich, die Annäherung fortsetzt.

Ist $\frac{t + t'}{2} - T = \Delta T$, so ist der Fehler, den man in der Bestimmung von l' durch die Annahme $\frac{t + t'}{2} = T$ begeht, gleich

$$-l' \,.\, \operatorname{cotang}(T + \eta') \,.\, \Delta T,$$

woraus sich auch bestimmen lässt, innerhalb welcher Gränzen überhaupt stat

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$\frac{t + t'}{2} = \Theta$ der Stundenwinkel T zur Berechnung von l genommen werden kann.

Eben so ergibt sich aus dem Gesagten, dass der Fehler, den man bei der Berechnung von l begeht, wenn man statt

$$d, \eta \text{ und } \frac{t + t'}{2} \text{ die Grössen}$$

$$d', \eta' \text{ und T nimmt gleich}$$

$$- l' \left[\Delta d' \operatorname{cotang} d' + (\Delta \eta' + \Delta T) \operatorname{cotang} (T + \eta')\right]$$

sein wird.

Wäre der Seitenfaden nördlich vom Mittelfaden, so wird in unseren für l und l' gefundenen Formeln f negativ zu nehmen sein.

In denselben und in den für $\Delta l'$ entwickelten Ausdrücken wird ferner mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen sein

$$\eta, \eta' \text{ und } \Delta \eta',$$

wenn Stern und Südende auf derselben Seite des Meridianes liegen, und b, wenn das Südende unter dem Horizont sich befindet.

Anmerkung. Vernachlässigt man bei der Bestimmung des Zeitintervalles $t - t'$ die Fehler b und Δ k des Instrumentes und setzt überdies $\Theta = \frac{t + t'}{2} = T$, so hat man zur genäherten Bestimmung dieses Intervalles, wenn Stern und Südende auf derselben Seite des Meridianes liegen, die Gleichung

$$t - t' = \frac{\pm f}{\cos \delta \sin d' \sin (T - \eta')}.$$

Es ist aber

$$\cos \delta \sin d' \sin (T - \eta') =$$
$$= \cos \delta \sin T \,.\, \sin d' \cos \eta' - \cos \delta \cos T \,.\, \sin d' \sin \eta',$$

und vermöge der Gleichungen (q') §. 10

$$\cos \delta \sin d' \sin (T - \eta') =$$
$$= \cos \delta \left[\sin T \cos k \,.\, \sin \varphi - \cos T \sin k\right], \text{ mithin}$$
$$\cos \delta \sin d' \sin (T - \eta') = \cos \delta \cos \zeta,$$

wo ζ den parallactischen Winkel des Sternes in der optischen Axe bei der angenommenen Lage der Letzteren bezeichnet, nämlich wenn sie das Azimuth $90^0 + k$ hat. Die obige Gleichung lässt sich daher auch unter der Form darstellen

$$t - t' = \frac{\pm f}{\cos \delta \cos \zeta}.$$

Befinden sich Stern und Südende auf verschiedenen Seiten des Meridianes, so hat man den angenäherten Ausdruck

$$t - t' = \frac{\pm f}{\cos \delta \sin d' \sin (T + \eta')}.$$

Man findet nun auf demselben Wege

$$\cos \delta \,.\, \sin d' \,.\, \sin (T + \eta') =$$
$$= \cos \delta \left[\sin T \cos k \sin \varphi + \cos T \sin k\right].$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Der innerhalb der Klammern stehende Ausdruck ist aber gerade der cosinus des parallactischen Winkels eines Sternes, der sich in der optischen Axe des Rohres, die das Azimuth $90^0 - k$ hat, befindet, wir haben daher auch in diesem Falle zur genäherten Bestimmung des Zeitintervalles die Gleichung

$$t - t' = \frac{\pm f}{\cos \delta \cos \zeta}.$$

12.

Gleichungen für den Stundenwinkel T unter einer andern Gestalt.

Hat man nach den Vorschriften (§§. 9—11) die Uhrzeit des Sternes am Mittelfaden mit gehöriger Schärfe bestimmt, so dienen die (§. 8) für T angeführten Gleichungen zur Bestimmung dieses Stundenwinkels, wenn b, Δ k und c bekannt sind.

Die Grösse b kann (wie schon bemerkt wurde) unmittelbar mittelst Nivellirung der Rotationsaxe des Rohres gefunden werden. Von der Bestimmung der Werthe von c und Δ k wird später die Rede sein. Dieselben sollen mittlerweile als bekannt angenommen werden.

Die in §. 8 für den Stundenwinkel T angeführten Gleichungen können aber auch unter einer andern Form dargestellt werden.

Wir haben, wenn sich Stern und Südende auf derselben Seite des Meridianes befinden, in dem Dreiecke: Stern, Zenith und Pol, den Winkel am Zenith (wenn der Stern in der optischen Axe steht) gleich $90^0 - k$, und somit

$$\cos \zeta = - \cos T \sin k + \sin T \cos k \sin \varphi,$$

$$1 + \frac{\cos T \sin k}{\cos \zeta} = \frac{\sin T \cos k \sin \varphi}{\cos \zeta},$$

$$\frac{1}{\cos^2 k \sin \varphi} \left(1 + \frac{\cos T \sin k}{\cos \zeta}\right) = \frac{\sin T}{\cos k \cos \zeta} = \frac{\sin Z}{\cos \delta \cos \zeta}.$$

Die Gleichungen (14) des §. 8 erhalten demnach folgende Gestalt:

$$(16) \quad \ldots \begin{cases} \text{für westliche Sterne:} \\ T = (\tau + \Delta \tau) - \alpha \pm \frac{c}{\cos \delta \cos \zeta} \mp \frac{b \cos Z}{\cos \delta \cos \zeta} - \frac{\Delta k \sin Z}{\cos \delta \cos \zeta}; \\ \text{für östliche Sterne:} \\ T = \alpha - (\tau + \Delta \tau) \pm \frac{c}{\cos \delta \cos \zeta} \mp \frac{b \cos Z}{\cos \delta \cos \zeta} - \frac{\Delta k \sin Z}{\cos \delta \cos \zeta}. \end{cases}$$

Befindet sich Stern und Südende auf verschiedenen Seiten des Meridianes, so ist im Dreiecke: Pol, Zenith und Stern in der optischen Axe, der Winkel am Zenith $= 90^0 + k$, und wir haben

$$\cos \zeta = \cos T \sin k + \sin T \cos k \sin \varphi,$$

$$1 - \frac{\cos T \sin k}{\cos \zeta} = \frac{\sin T \cos k \sin \varphi}{\cos \zeta} \text{ und}$$

$$\frac{1}{\cos^2 k \sin \varphi} \left[1 - \frac{\cos T \sin k}{\cos \zeta}\right] = \frac{\sin T}{\cos k \cos \zeta} = \frac{\sin Z}{\cos \delta \cos \zeta}.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die Gleichungen (15) geben demnach

$$(17)\quad \begin{cases} \text{für westliche Sterne:} \\ T = (\tau + \Delta\tau) - \alpha \pm \dfrac{c}{\cos\delta\cos\zeta} \mp \dfrac{b\cos Z}{\cos\delta\cos\zeta} + \dfrac{\Delta k \sin Z}{\cos\delta\cos\zeta}, \\ \text{für östliche Sterne:} \\ T = \alpha - (\tau + \Delta\tau) \pm \dfrac{c}{\cos\delta\cos\zeta} \mp \dfrac{b\cos Z}{\cos\delta\cos\zeta} + \dfrac{\Delta k \sin Z}{\cos\delta\cos\zeta}. \end{cases}$$

Für die Zeichen von c und b gelten dieselben Bestimmungen, wie §. 8.

13.

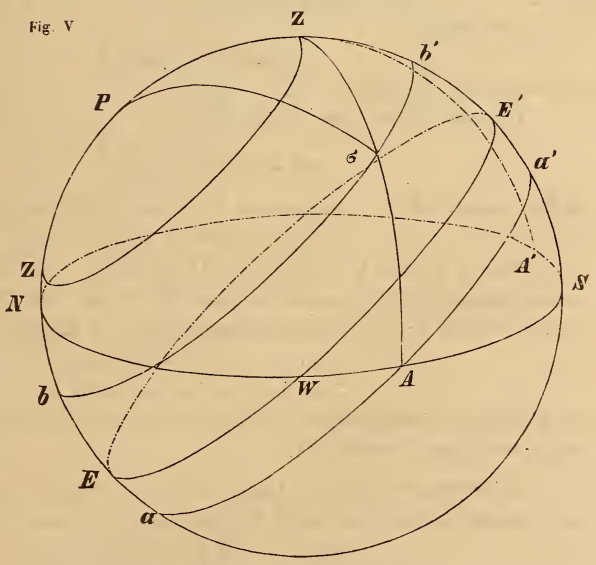
Bestimmung der Sterne, die durch einen gegebenen Vertical gehen.

Wir wollen nun näher untersuchen, welche Sterne einen Vertical, dessen Lage gegeben ist, durchschneiden können.

I. Liegen Stern und Südende auf entgegengesetzten Seiten des Meridianes, so fällt die Objectivseite des Rohres in den ersten oder vierten Quadranten des Horizontes, wenn wir diese von Süd über West nach Nord und Ost zählen.

Setzen wir den durch die optische Axe gelegten Vertical ZA (Fig. V) westlich und den Vertical ZA′ durch das Südende östlich vom Meridiane; das Azimuth dieses Endes, nämlich $\angle SZA' = k$, somit $\angle SZA = 90^0 - k$ und $\angle PZA = 90^0 + k$. Es ist an sich klar, dass von den diesen Vertical durchschneidenden Sternen der nördlichste denselben in Z und der südlichste in A treffen wird.

Fig. V



Die Declination des durch das Zenith Z gehenden Sternes ist bekanntlich $= \varphi$. Die Declination des Sternes, welcher den Vertical im Horizonte schneidet, ergibt sich, da $ZA = 90^0$, aus

$$\sin\delta = -\cos\varphi \sin k.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Demnach liegen die Declinationen der Sterne, welche den Vertical Z A im Azimuthe $90^0 - k$ bei ihrer täglichen Bewegung durchschneiden, innerhalb der Gränzen

$$\delta = \varphi \text{ und}$$
$$\delta = - \text{Arc sin} = [\cos \varphi \,.\, \sin k].$$

Der Stundenwinkel des durch Z gehenden Sternes ist in dem Verticale Z A gleich o; der Stundenwinkel des Sternes im Puncte A dieses Verticales bestimmt sich durch die Gleichung

$$\text{cotang } T = \sin \varphi \text{ tang } k,$$

und alle Stundenwinkel der den Vertical im Azimuthe $90^0 - k$ durchschneidenden Sterne liegen innerhalb der Gränzen

$$T = o \text{ und}$$
$$T = \text{Arc cotang} = [\sin \varphi \,.\, \text{tang } k].$$

Was insbesondere den Stundenwinkel im Aequator, wo $\delta = o$, betrifft, so folgt aus der Gleichung

$$- \sin T \,.\, \text{tang } k = \text{tang } \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos T, \text{ (§. 1)}$$
$$\text{tang } T = \frac{\sin \varphi}{\text{tang } k}.$$

Der parallactische Winkel der Sterne, die durch den Punct Z des Verticales Z A gehen, ist vermöge der Gleichung (§. 2)

(w) . . . $- \sin \zeta \text{ tang } k = \text{tang } \delta \sin Z - \cos Z \cos \zeta$, in der $Z = o$ ist, durch

$$\text{tang } \zeta = \text{cotang } k$$

gegeben, somit $\zeta = 90^0 - k$.

Derselbe Werth von ζ folgt auch aus

$$\sin \zeta = \frac{\cos \varphi \cos k}{\cos \delta},$$

da für unsern Fall $\delta = \varphi$, also $\sin \zeta = \cos k$, und somit

$$\zeta = 90^0 - k \text{ ist.}$$

Von Z gegen A nehmen die Declinationen bis zum Aequator ab, es wächst demnach $\cos \delta$, somit nehmen die Werthe von ζ ab und werden für $\delta = o$, wo $\cos \delta = 1$ ist, am kleinsten. Hier ist nämlich

$$\sin \zeta = \cos \varphi \cos k, \text{ also}$$
$$\zeta = \text{Arc sin} = [\cos \varphi \cos k]$$

der Werth des parallactischen Winkels der Sterne im Aequator bei ihrem Durchgange durch den Vertical Z A.

Bei Sternen unter dem Aequator, also für negative δ nehmen die Werthe von ζ wieder zu und wir haben für den untersten Punct A des Verticals

$$\text{tang } \zeta = \cos k \text{ cotang } \varphi, \text{ somit}$$
$$\zeta = \text{Arc tang} = [\cos k \text{ cotang } \varphi].$$

Es soll noch hier bemerkt werden, dass vermöge der Gleichung

$$\sin \zeta = \frac{\cos \varphi \,.\, \cos k}{\cos \delta}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

die nördlich oder südlich gleich weit vom Aequator abstehenden Sterne auch gleiche parallactische Winkel bei ihrem Durchgange durch den Vertical Z A haben.

Das Gesagte gilt auch für einen im vierten Quadranten gelegenen Vertical.

Anmerkung. Für k = o, also für den Fall, dass sich die optische Axe des Rohres im ersten Vertical befindet, haben wir die Gränzen:

für δ . . . $\delta = \varphi$ und $\delta = o$
„ T . . . $T = o$ „ $T = 90^0$
„ ζ . . . $\zeta = 90^0$ „ $\zeta = 90^0 - \varphi$.

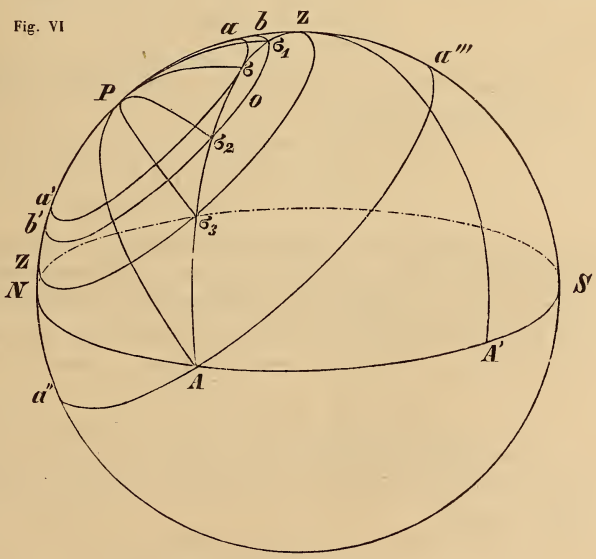
14.

Fortsetzung und Schluss.

II. Liegen Stern und Südende auf derselben Seite des Meridianes, so befindet sich die Objectivseite des Fernrohres im zweiten oder dritten Quadranten.

Nehmen wir an, es liegen Stern und Südende auf der Westseite des Meridianes, mithin das Objectiv des Fernrohres im zweiten Quadranten, so werden durch den Vertical Z A (Fig. VI) der optischen Axe nur jene Sterne gehen, deren Poldistanz zwischen P σ und P A liegt, wo P σ die Poldistanz eines Paralleles a σ a′ ist, der den Vertical in σ berührt und P A die Poldistanz jenes Parallels a″ A a‴, der durch den im Horizont gelegenen Punct A dieses Verticals geht.

Fig. VI



Befindet sich ein Stern im Berührungspuncte σ, so ist im Dreiecke P σ Z, da P σ senkrecht auf A Z,

$$\cos \delta = \cos \varphi \cos k.$$

Die Declination des durch A gehenden Sternes gibt die Gleichung

$$\sin \delta = \cos \varphi \sin k.$$

Mithin sind die Declinationen der Sterne, welche durch den Vertical Z A gehen, zwischen den Gränzen

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\delta = \text{Arc cos} = [\cos \varphi \cos k] \text{ und}$$
$$\delta = \text{Arc sin} = [\cos \varphi \sin k].$$

Der Stundenwinkel des Sternes im Berührungspuncte σ gibt die Gleichung

$$\text{cotang } T = \sin \varphi \text{ cotang } k,$$

und im Puncte A, cotang $T = - \sin \varphi$ tang k.

Was endlich den parallactischen Winkel betrifft, so ist im Berührungspuncte σ

$$\zeta = 90^0;$$

für den Punct A findet man den parallactischen Winkel aus

$$\text{tang } \zeta = \text{cotang } \varphi \cos k.$$

Sterne, deren Poldistanz grösser als $P\sigma$, oder deren Declination kleiner ist als der Bogen, dessen Cosinus gleich $\cos \varphi \cos k$, jedoch grösser als φ durchschneiden den Vertical bei ihrer täglichen Bewegung zweimal, wie dies (Fig. VI) erläutert; so werden z. B.: die Sterne im Parallel $b'\sigma_2\sigma$, b den Vertical in den Puncten σ, und σ_2 durchschneiden, mithin einen obern und einen untern Durchgang durch den Vertical haben.

Das Dreieck zwischen Pol P und den Durchschnittspuncten σ, und σ_2, in welchen das Stück $\sigma_1\sigma_2$ des Verticalkreises die dem Pol gegenüberstehende Seite bildet, ist ein gleichschenkeliges, demnach

$$\angle P\sigma_1 A = \angle P\sigma_2 Z = \zeta', \text{ also}$$
$$\angle P\sigma_1 Z = 180^0 - \zeta' = \zeta \text{ und}$$
$$\zeta + \zeta' = 180^0.$$

Bezeichnet man den Winkel $\sigma\sigma_2 o$ mit α und den Winkel $\sigma\sigma_1 o = Z\sigma_1 b$ mit β, so hat man

$$\zeta = 90^0 + \beta, \ \zeta = 90^0 - \alpha,$$
$$\text{also } \zeta + \zeta' = 180^0 + \beta - \alpha \text{ und wegen}$$
$$\zeta + \zeta' = 180^0, \text{ auch } \alpha = \beta.$$

Die parallactischen Winkel eines Sternes bei seinem obern und untern Durchgange durch den Vertical ergänzen demnach einander zu 180^0 und jeder Stern desselben Parallelkreises durchschneidet den Vertical bei seinem obern und untern Durchgange unter gleichen Winkeln. Es sind ferner die parallactischen Winkel der Sterne im obern Durchgange grösser und im untern kleiner als 90^0.

Diese parallactischen Winkel nehmen ferner für die den Vertical von σ bis Z durchschneidenden Sterne zu, und von σ gegen A ab. Den grössten parallactischen Winkel wird ein den Vertical im Zenithe durchschneidender Stern haben, nämlich

$$\zeta = 90^0 + k.$$

Dies folgt aus dem gleichschenkeligen Dreiecke $P\sigma_3 Z$, in welchem

$$\angle P\sigma_3 Z = PZ\sigma_3 = 90^0 - k \text{ ist.}$$

Der Winkel $P\sigma_3 Z$ ist nun der parallactische Winkel bei dem unteren Durchgange des Sternes durch den Vertical; da sich die parallactischen Winkel des unteren und oberen Durchganges eines Sternes zu 180^0 ergänzen, so ist

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

der parallactische Winkel des Sternes bei seinem Durchgange durch Z gleich $90^0 + k$.

Dies folgt auch aus der Gleichung

$$\sin Z \operatorname{tang} \delta = \operatorname{tang} k \sin \zeta + \cos Z \cos \zeta.$$

Da für unseren Fall $Z = o$, so folgt

$$\operatorname{tang} \zeta = - \operatorname{cotang} k, \text{ also}$$

$$\zeta = 90^0 + k.$$

Die Stundenwinkel T der Sterne bei ihrem Durchgange durch den Vertical betreffend, so werden diese von Z gegen A zunehmen und durch die Werthe

$$T = o \text{ und}$$

$$T = \text{Arc cotang} = [- \sin \varphi \operatorname{tang} k], \text{ begränzt sein.}$$

Bezüglich der Sterne im Parallel $Z\sigma_3 Z$ soll über ihren unteren Durchgang noch Folgendes bemerkt werden: Aus der Gleichung

$$\sin T \operatorname{cotang} \zeta = \operatorname{tang} \varphi \cos \delta - \sin \delta \cos T \text{ folgt, da hier}$$

$$\zeta = 90^0 - k \text{ und } \delta = \varphi \text{ ist}$$

$$\sin T \operatorname{tang} k = \sin \varphi (1 - \cos T) = 2 \sin \varphi \sin^2 \frac{T}{2},$$

$$\text{somit } \operatorname{cotang} \frac{T}{2} = \sin \varphi \operatorname{cotang} k = \operatorname{tang} q \text{ (vergl. §. 4).}$$

Hieraus folgt $\frac{T}{2} = 90^0 - q$ oder

$$T = 180^0 - q,$$

der Stundenwinkel der Sterne im Puncte σ_3 des Verticals.

Es folgt ferner aus der Gleichung

$$\sin \delta = \sin \varphi \cos Z + \sin Z \cos \varphi \sin k \text{ für } \delta = \varphi$$

$$1 = \cos Z + \sin Z \,.\, \operatorname{cotang} \varphi \sin k, \text{ und für}$$

$$\operatorname{cotang} \varphi \sin k = \operatorname{tang} \mu$$

$$\cos \mu = \cos (Z - \mu), \text{ also}$$

$$Z = r\ \mu, \text{ die Zenithdistanz des Sternes im Puncte } \sigma_3.$$

Mittelst des bekannten Werthes von Z lässt sich auch der parallactische Winkel der Sterne in diesem Puncte finden; die Gleichung

$\sin \varphi = \sin \delta \cos Z + \cos \delta \sin Z \cos \zeta$ geht nämlich für $\delta = \varphi$ über in

$$1 = \cos Z + \operatorname{cotang} \varphi \sin Z \cos \zeta \text{ und}$$

$$\cos \zeta = \frac{1 - \cos Z}{\operatorname{cotang} \varphi \,.\, \sin Z} = \sin k, \text{ also}$$

$$\zeta = 90^0 - k; \text{ wie bereits oben gefunden wurde.}$$

Wäre das Rohr im 3. Quadranten gelegen, so gelangt man zu denselben Resultaten.

Vergleicht man die Werthe der parallactischen Winkel für die Verticale in den Azimuthen $90^0 - k$ und $90^0 + k$, nämlich für zwei Verticale, die beziehungsweise südlich und nördlich gleich weit vom Meridiane abstehen, so sind die Werthe von ζ für alle Sterne, welche den nördlichen Vertical in zwei Puncten durchschneiden, grösser als die parallactischen Winkel jener Sterne, die durch den südlichen Vertical gehen. Von $\delta = \varphi$ bis $\delta = \text{Arc sin} = [\cos \varphi \sin k]$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

sind für beide Verticale die Winkel ζ gleich, und die Sterne innerhalb dieser Declinationsgränzen durchschneiden, sowohl den nördlichen als auch den südlichen Vertical.

Die Sterne aber, welche innerhalb der Declinationsgränzen $\pm$ Arc sin $=$ [cos φ sin k] liegen, durchschneiden blos den südlichen Vertical und ihre parallactischen Winkel, alle sind kleiner als der kleinste dieser Winkel im nördlichen Vertical.

Der parallactische Winkel ζ ergänzt den Winkel, unter welchem ein Stern den Vertical durchschneidet, zu 90^0 und die Zeit des Durchganges eines Sternes durch diesen Vertical (oder durch die Verticalfäden im Fernrohre) wird desto sicherer aufgefasst werden können, je grösser der Winkel ist, unter welchem der Vertical durchschnitten wird. Dies wird also für $k = 90^0$, oder wenn die optische Axe des Rohres im Meridiane steht, am schärfsten geschehen können. Diese günstige Lage vermindert sich, wenn k kleiner als 90^0 wird und wird am ungünstigsten, wenn $k = o^0$, oder wenn sich die optische Axe im ersten Verticale befindet.

Es werden ferner diese Momente für ein gegebenes k desto schärfer aufgefasst werden können, je näher der beobachtete Stern dem Aequator liegt, indem für solche Sterne sowohl die parallactischen Winkel kleiner sind und auch die Sterne eine grössere scheinbare Geschwindigkeit haben.

Setzt man die scheinbare Geschwindigkeit eines im Aequator gelegenen Sternes $= V$, und $= v$ in einen zweiten Parallel, dessen Declination oder Abstand vom Aequator $= \delta$ ist, so hat man bekanntlich

$$v = V \,.\, \cos \delta.$$

Die Richtung dieser Geschwindigkeit macht (wie oben bemerkt wurde) mit dem Vertical des Fernrohres einen Winkel $= 90^0 - \zeta$, es ist demnach der auf den Vertical senkrechte Theil dieser Geschwindigkeit

$$v' = v \cos \zeta, \text{ somit auch}$$

$$v' = V \,.\, \cos \delta \cos \zeta.$$

Die Folgerungen aus dieser Gleichung in Bezug auf die Schärfe der Beobachtungen ergeben sich von sich selbst.

15.

Das Passage-Instrument mit der optischen Axe im Meridiane.

Das Passage-Instrument wird vorzugsweise zur Bestimmung der Zeit und der geographischen Breite eines Ortes gebraucht.

Soll es zur Zeitbestimmung dienen, so gibt man der optischen Axe die zu diesem Zwecke günstigste Lage, wenn man sie (wie oben gezeigt wurde) in den Meridian stellt, wo dann

$$k = 90^0,\ T = o \text{ und } \cos \zeta = \pm 1 \text{ wird.}$$

Welches Zeichen cos ζ erhält, lehrt folgende Erwägung.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Setzt man den Stundenwinkel eines Sternes = t, sein Azimuth vom nördlichen Theile des Meridianes gegen Süden durch Ost und West bis 180^0 gezählt = α, so ist im Dreiecke: Pol, Zenith und Stern

$$\cos \zeta = - \cos a \cos t + \sin a \sin t \,.\, \sin \varphi.$$

Für südlich vom Zenith culminirende Sterne ist $a = 180^0$, $t = o$, somit

$$\cos \zeta = + 1.$$

Culminiren die Sterne zwischen Zenith und Pol, oder für Sterne in der oberen Culmination, ist

$$a = o,\ t = o, \text{ also}$$
$$\cos \zeta = - 1.$$

Für, zwischen Pol und Horizont culminirende Sterne oder für Sterne in der unteren Culmination, ist

$$a = o,\ t = 180^0, \text{ folglich}$$
$$\cos \zeta = + 1.$$

Fasst man nun unsere Gleichungen (16) §. 12 ins Auge, so wird in denselben vorausgesetzt, dass sich Stern und Südende auf derselben Seite des Meridianes befinden, und zwar das Südende im Azimuthe $k + \triangle k$, mithin die optische Axe im Azimuthe

$$90^0 + k + \Delta k.$$

Setzt man $k = 90^0$, so wird das von uns „Südende" genannte Ende der Rotationsaxe das Azimuth $90^0 + \Delta k$ und die optische Axe das Azimuth $180^0 + \Delta k$ erhalten, d. h.: es liegt dann das Rohr mit der Objectivseite gegen Nord, vom Meridiane um Δk im Azimuthe abstehend, und zwar östlich, wenn das (frühere) Südende westlich, und westlich, wenn dieses östlich vom Meridiane sich befindet.

Wird nun das Rohr auf einen zwischen Zenith und Pol culminirenden Stern gestellt, so haben wir aus der ersten der Gleichungen (16), da $\cos \zeta = - 1$

für östliche Sterne:

$$o = (\tau + \Delta \tau) - \alpha \mp \frac{c}{\cos \delta} \pm \frac{b \cos Z}{\cos \delta} + \frac{\Delta k \sin Z}{\cos \delta}, \text{ oder}$$

$$(18) \quad . \ . \ . \quad \alpha = \tau + \Delta \tau \mp \frac{c}{\cos \delta} \pm \frac{b \cos Z}{\cos \delta} + \frac{\Delta k \sin Z}{\cos \delta}.$$

Die oberen Zeichen sind in dieser Gleichung zu nehmen:
bei c, wenn der Mittelfaden westlich von der optischen Axe,
bei b, wenn das Westende der Rotationsaxe über dem Horizont steht.

Aus der zweiten der Gleichungen (16) erhalten wir für westliche zwischen Zenith und Pol culminirende Sterne

$$o = \alpha - (\tau + \Delta \tau) \mp \frac{c}{\cos \delta} \pm \frac{b \cos Z}{\cos \delta} + \frac{\Delta k \sin Z}{\cos \delta}, \text{ oder}$$

$$(19) \quad . \quad \alpha = \tau + \Delta \tau \pm \frac{c}{\cos \delta} \mp \frac{b \cos Z}{\cos \delta} - \frac{\Delta k \sin Z}{\cos \delta}.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Die obern Zeichen sind zu nehmen:

bei c, wenn der Mittelfaden östlich von der optischen Axe,

bei b, wenn das Ostende der Rotationsaxe des Rohres über dem Horizont steht.

Wäre der Mittelfaden westlich von der optischen Axe und das Westende über dem Horizonte, so gibt unsere letzte Gleichung

$$\alpha = \tau + \Delta\tau - \frac{c}{\cos\delta} + \frac{b\cos Z}{\cos\delta} - \frac{\Delta k \sin Z}{\cos\delta}.$$

Man hat daher allgemein für Sterne in ihrer oberen Culmination

$$(20) \quad . \quad . \quad . \quad \alpha = \tau + \Delta\tau \pm \frac{c}{\cos\delta} \pm \frac{b\cos Z}{\cos\delta} \pm \frac{\Delta k \sin Z}{\cos\delta},$$

wo die oberen Zeichen zu nehmen sind;

bei c, wenn der Mittelfaden östlich von der optischen Axe,

bei b, wenn das Westende der Rotationsaxe über dem Horizont,

bei $\triangle$ k, wenn bei nach Süden gekehrtem Rohre die optische Axe westlich vom Meridiane sich befindet.

Bei Sternen, die zwischen Zenith und Pol culminiren, ist $Z = \delta - \varphi$, es kann daher die vorausgehende Gleichung auch unter folgender Form erscheinen:

$$(21) \quad . \quad \alpha = \tau + \Delta\tau \pm \frac{c}{\cos\delta} \pm \frac{b\cos(\delta - \varphi)}{\cos\delta} \pm \frac{\Delta k \sin(\delta - \varphi)}{\cos\delta}.$$

Für untere Culminationen hat man, da $\cos\zeta$ das Zeichen ändert und $\cos\zeta = +1$ wird

$$(22) \quad . \quad 12^h + \alpha = \tau + \Delta\tau \mp \frac{c}{\cos\delta} \mp \frac{b\cos Z}{\cos\delta} \mp \frac{\Delta k \sin Z}{\cos\delta};$$

für unter den Pol culminirende Sterne ist nun

$Z = 90^0 - \varphi + 90^0 \delta = 180^0 - (\varphi + \delta)$, mithin auch

$$(23) \quad . \quad 12^h + \alpha = \tau + \Delta\tau \mp \frac{c}{\cos\delta} \pm \frac{b\cos(\varphi + \delta)}{\cos\delta} \mp \frac{\Delta k \sin(\varphi + \delta)}{\cos\delta}.$$

Auch in dieser Gleichung sind die oberen Zeichen zu nehmen:

bei c, wenn der Mittelfaden östlich von der optischen Axe,

bei b, wenn das Westende über dem Horizont,

bei $\triangle$ k, wenn bei nach Süd gekehrter Objective die optische Axe ein westliches Azimuth hat.

16.

Fortsetzung und Schluss.

Die Gleichungen (17) setzen voraus, dass sich Südende und Stern auf verschiedenen Seiten des Meridianes befinden, und dass das Südende das Azimuth $k + \Delta k$ hat.

Wird $k = 90^0$, so ist das Azimuth dieses Endes $= 90^0 + \Delta k$, mithin das Azimuth der optischen Axe $= \Delta k$. Es fällt daher diese mit dem Ende

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

der Rotationsaxe, dessen Azimuth $= 90^0 + \Delta$ k ist, immer auf dieselbe Seite des Meridianes, und die Objectivseite des Rohres ist nach Süden gekehrt.

Bei südlich vom Zenithe culminirenden Sternen ist $\cos \zeta = + 1$, somit gibt die erste der Gleichungen (17) für östliche Sterne und bei östlichem Azimuthe $= \Delta$ k der optischen Axe

$$(24) \quad . \quad . \quad . \quad \alpha = \tau + \Delta \tau \pm \frac{c}{\cos \delta} \mp \frac{b \cos Z}{\cos \delta} + \frac{\Delta k \sin Z}{\cos \delta}, \text{ wo}$$

die oberen Zeichen zu nehmen sind;

bei c, wenn der Mittelfaden östlich von der optischen Axe,

bei b, wenn das Ostende der Rotationsaxe über dem Horizont sich befindet.

Die zweite der Gleichungen (17) gibt für westliche Sterne und bei westlichem Azimuthe $= \Delta$ k der optischen Axe

$$(25) \quad . \quad . \quad . \quad \alpha = \tau + \Delta \tau \mp \frac{c}{\cos \delta} \pm \frac{b \cos Z}{\cos \delta} - \frac{\Delta k \sin Z}{\cos \delta};$$

die oberen Zeichen werden hier zu nehmen sein;

bei c, wenn der Mittelfaden westlich von der optischen Axe,

bei b, wenn das Westende über dem Horizont steht.

Wir haben demnach allgemein für südlich vom Zenith culminirende Sterne:

$$(26) \quad . \quad \begin{cases} \alpha = \tau + \Delta \tau \pm \frac{c}{\cos \delta} \pm \frac{b \cos Z}{\cos \delta} \mp \frac{\Delta k \sin Z}{\cos \delta}, \\ \text{oder da für diese Sterne } Z = \varphi - \delta \text{ ist,} \\ \alpha = \tau + \Delta \tau \pm \frac{c}{\cos \delta} \pm \frac{b \cos (\varphi - \delta)}{\cos \delta} \mp \frac{\Delta k \sin \varphi (-\delta)}{\cos \delta}, \end{cases}$$

wo die oberen Zeichen zu nehmen sind,

bei c, wenn der Mittelfaden östlich von der optischen Axe,

bei b, wenn das Westende über dem Horizont,

bei Δ k, wenn das Azimuth der optischen Axe westlich ist.

Die Anwendung der im §. 15 und 16 entwickelten Formeln auf die Bestimmung der Zeit oder der geraden Aufsteigung der Gestirne findet man in den Lehrbüchern über sphärische Astronomie.

17.

Das Passage-Instrument mit der optischen Axe in einem beliebigen Azimuthe.

Gestatten es die Verhältnisse des Platzes, wo das Passage-Instrument aufzustellen ist, nicht, die optische Axe des Fernrohres in den Meridian zu bringen, so kann man Letzterer auch eine Lage ausser dem Meridiane geben, nur ist es der Schärfe der Resultate wegen (§. 14) wünschenswerth, dass dies im ersten oder vierten Quadranten und in einem kleinen Azimuthe geschehe.

Setzen wir, man habe das Azimuth, in welches die optische Axe des Rohres fallen soll, durch die den Astronomen zu Gebote stehenden Mittel mit

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

der nöthigen Schärfe bestimmt und = A gefunden, so ist (nach der in der gegenwärtigen Abhandlung eingeführten Bezeichnung) für den Fall, dass Rohr und Südende auf entgegengesetzten Seiten des Meridianes liegen, $k = 90^0 - A$. Befinden sich aber Südende und Rohr auf derselben Seite des Meridianes, so wird $k = A - 90^0$ sein.

In das Azimuth A wird nun der Mittelfaden des möglichst genau rectificirten Instrumentes eingestellt. Nehmen wir an, es sei das Azimuth der optischen Axe, nämlich $A = 90^0 - k$, oder es befinden sich Südende und Rohr auf verschiedenen Seiten des Meridianes, so haben wir, wenn das Rohr westlich ist den Stundenwinkel des beobachteten Sternes (§. 8), Gleichung (15):

$$T = \tau + \Delta\tau - \alpha$$

$$+ \frac{1}{\cos^2 k \sin\varphi}\left[1 - \frac{\sin k \cos T}{\cos\zeta}\right]\left(\frac{\pm c \mp b \cos Z}{\sin Z} + \Delta k\right).$$

Setzt man

$$\frac{1}{\cos^2 k \sin\varphi}\left[1 - \frac{\sin k \cos T}{\cos\zeta}\right] = \mu; \quad \frac{\mu}{\sin Z} = \lambda \text{ und}$$

$$\frac{\mu}{\operatorname{tang} Z} = v, \text{ so hat man auch}$$

(27) . . . $T = (\tau + \Delta\tau) - \alpha \pm \lambda c \mp v . b + \mu . \Delta k.$

Ist das Rohr östlich, so ist der Stundenwinkel des beobachteten Sternes

(28) . . . $T = \alpha - (\tau + \Delta\tau) \pm \lambda c \mp v . b + \mu . \Delta k.$

In diesen beiden Gleichungen hat man die oberen Zeichen zu nehmen:
bei c, wenn der Mittelfaden südlich von der optischen Axe,
bei b, wenn das Südende über dem Horizont steht.

Befindet sich Südende und Rohr auf derselben Seite des Meridianes, wo dann $A = 90^0 + k$, so haben wir (Gl. 14)

für westliche Sterne:

$$T = (\tau + \Delta\tau) - \alpha$$

$$+ \frac{1}{\cos^2 k \sin\varphi}\left[1 + \frac{\sin k \cos T}{\cos\zeta}\right]\left(\frac{\pm c \mp b \cos Z}{\sin Z} - \Delta k\right).$$

Setzt man auch hier

$$\frac{1}{\cos^2 k \sin\varphi}\left(1 + \frac{\sin k \cos T}{\cos\zeta}\right) = \mu; \quad \frac{\mu}{\sin Z} = \lambda \text{ und}$$

$$\frac{\mu}{\operatorname{tang} Z} = v, \text{ so erscheint die obige Gleichung unter der Gestalt}$$

(29) . . . $T = (\tau + \Delta\tau) - \alpha \pm \lambda . c \mp v . b - \mu . \Delta k$, und

für östliche Sterne:

(30) . . . $T = \alpha - (\tau + \Delta\tau) \pm \lambda . c \mp v . b - \mu . \Delta k$, wo bezüglich der Zeichen das oben Gesagte gilt.

Zur bequemeren Berechnung dieser Ausdrücke wird man sich Tafeln für die Werthe von μ, λ, v und T entwerfen. Diese Tafeln werden am füglichsten

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

nach dem Argumente der Declination der Sterne, welche durch den in einem bestimmten Azimuthe befindlichen Vertical gehen können, geordnet sein. (§. 13 und 14).

Vergleicht man die Formeln (27—30) mit den Formeln (16) und (17), so sieht man, dass

$$\lambda = \frac{1}{\cos \delta \cos \zeta}, \quad v = \lambda \cos Z \text{ und } \mu = \lambda \sin Z$$

ist, welche Ausdrücke zur Berechnung von λ, v und μ sehr bequem sind.

Mag man nun die genannten Grössen aus diesen oder den oben angeführten Gleichungen ableiten, so wird man sie für jene Durchgänge, wo $\zeta > 90^0$ ist, negativ finden. Wie oben (§. 14) gezeigt wurde, ist dies der Fall, wenn der Vertical der optischen Axe im zweiten oder dritten Quadranten steht, und zwar bei den oberen Durchgängen jener Sterne, deren Declinationen sich innerhalb der Gränzen

$$\delta = \varphi \text{ und}$$
$$\delta = \text{Arc cos} = [\cos \varphi \,.\, \cos k] \text{ befinden.}$$

18.

Fortsetzung.

Sollen die im vorausgehenden Paragraphe entwickelten Gleichungen für T zur Zeitbestimmung benützt werden können, so müssen die Grössen b, c und Δ k bekannt sein.

Von der Bestimmung von b war schon wiederholt die Rede.

Zur Bestimmung von c stehen den Astronomen mehrere Methoden zu Gebote. Nöthigenfalls kann hiezu der am Passage-Instrumente selbst beobachtete Durchgang eines passenden Sternes dienen.

A. Steht der Vertical der optischen Axe im ersten oder vierten Quadranten, so nehme man einen Stern, der nahe am Zenith diesen Vertical durchschneidet, und lege während seines Durchganges um.

Nehmen wir, um einen bestimmten Fall zu haben, die optische Axe westlich vom Meridiane, so haben wir für die

$$\text{Lage I.} \quad T = (\tau + \Delta \tau) - \alpha + \lambda \,.\, c + v \,.\, b + \mu \,.\, \Delta k,$$
$$\text{„ II.} \quad T = (\tau' + \Delta \tau') - \alpha - \lambda\, c + v\, b' + \mu \,.\, \Delta k.$$

In der ersten Gleichung ist c positiv genommen worden, es muss daher nach der Umlegung negativ werden. Die Glieder $+ v \,.\, b$ und $+ v \,.\, b'$ bezeichnen den dem Gliede $\mp v \,.\, b$ (Gl. 27) entsprechenden Ausdruck, nachdem man das Zeichen der Grössen b und b' gehörig berücksichtigt hat.

Die beiden obigen Gleichungen mit einander verbunden geben

$$o = (\tau - \tau') + (\Delta \tau - \Delta \tau') + v\,(b - b') + 2\,\lambda \,.\, c \text{ und}$$
$$c = \frac{(\tau' - \tau) + (\Delta \tau' - \Delta \tau) + (b' - b)\, v}{2\,\lambda}.$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Da das Zeitintervall $(\tau' - \tau)$ nur einige Minuten betragen kann, während welcher Zeit sich die Beobachtungsuhr in der Regel unmerklich ändern wird, so kann man die Differenz $(\Delta \tau' - \Delta \tau)$ vernachlässigen, und hat demnach

$$c = \frac{(\tau' - \tau) + (b' - b)\, v}{2\, \lambda}.$$

Befindet sich die optische Axe östlich vom Meridiane, so findet man auf dieselbe Art

$$c = \frac{-(\tau' - \tau) + (b' - b)\, v}{2\, \lambda}, \text{ mithin allgemein}$$

(31) . . . $c = \dfrac{\pm (\tau' - \tau) + (b' - b)\, v}{2\, \lambda}$, wo das obere Zeichen bei westlicher Lage des Rohres zu nehmen ist.

Das aus dieser Gleichung für c gefundene Zeichen gilt für die erste Lage des Instrumentes.

Diese Bestimmung von c setzt voraus, dass sich der Azimuthalfehler Δ k während der Beobachtung nicht geändert hat, deshalb die Umlegung mit aller Vorsicht vorzunehmen sein wird.

Man wählt zu dieser Bestimmung Sterne, die nahe am Zenith durch den Vertical gehen, weil sie unter allen den Vertical in der angenommenen Lage durchschneidenden Sternen die längste Durchgangszeit haben und auch λ einen relativ grössten Werth erhält.

B. Befindet sich der Vertical der optischen Axe im zweiten oder dritten Quadranten, so haben (wie gezeigt wurde) die Sterne, deren Declination innerhalb der Gränzen

$$\delta = \varphi \text{ und}$$

$$\delta = \text{Arc cos} = [\cos \varphi \cos k]$$

liegt, einen oberen und einen unteren Durchgang durch diesen Vertical. Bei den oberen Durchgängen sind λ, v und μ negativ.

Nehmen wir die optische Axe westlich an, und wählen zur Bestimmung von c den oberen Durchgang eines Sternes, so haben wir für die Lage

$$\text{I.} \quad T = (\tau + \Delta \tau) - \alpha - \lambda\, c + v\, b + \mu \,.\, \Delta k$$

$$\text{II.} \quad T = (\tau' + \Delta \tau') - \alpha + \lambda\, c + v\, b' + \mu \,.\, \Delta k \text{ und}$$

$$c = \frac{(\tau - \tau') + v\,(b - b')}{2\, \lambda}.$$

Das für c erhaltene Zeichen gilt für die erste Lage des Instrumentes.

Ist das Rohr östlich vom Meridiane, so erhält man

$$c = \frac{(\tau' - \tau) + v\,(b - b')}{2\, \lambda}.$$

Es ist daher allgemein

(32) . . . $c = \dfrac{\pm (\tau' - \tau) + v\,(b - b')}{2\, \lambda}$, wo das obere Zeichen bei östlicher Lage des Rohres zu nehmen ist.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Hat man einen Stern in seinem unteren Durchgange durch den Vertical gewählt, so erhält man zur Bestimmung von c denselben Ausdruck, wie oben in Gleichung (31).

19.

Schluss.

Wird für das Passage-Instrument im Azimuthe A eine Mire aufgestellt, und ist diese mit einer entsprechenden Scale versehen, so lässt sich durch letztere die Aenderung Δ k des Azimuthes auf eine sehr einfache Weise finden. In Ermanglung einer solchen Scale kann man zur Bestimmung von Δ k entweder die zur Zeitbestimmung beobachteten Durchgänge benützen, wie dies später gezeigt werden soll, oder man beobachtet eigens den Durchgang zweier zweckmässig gewählter Sterne.

A. Liegt das Rohr im ersten oder vierten Quadranten, so beobachte man zwei Sterne, von denen der eine nahe am Zenith und der zweite nahe am Horizont den Vertical der optischen Axe durchschneidet. Nehmen wir die optische Axe, im ersten Quadranten gelegen, an, so hat man für den ersten Stern

$$T = (\tau + \Delta\tau) - \alpha + \lambda c + v b + \mu . \Delta k$$

und für den zweiten

$$T' = (\tau' + \Delta\tau') - \alpha' + \lambda' c + v' b' + \mu' . \Delta k, \text{ somit}$$

$$T - T' = (\tau - \tau') + (\alpha' - \alpha) + (\Delta\tau - \Delta\tau') + (\lambda - \lambda') c + v b - v' b' + (\mu - \mu') \Delta k, \text{ also}$$

$$\Delta k = \frac{(\tau - \tau') + (\Delta\tau - \Delta\tau') + (\alpha' - \alpha) + (T' - T) + (\lambda - \lambda') c + v b - v' b'}{\mu' - \mu}.$$

Liegt das Rohr im vierten Quadranten, so findet man

$$\Delta k = \frac{-(\tau - \tau') - (\Delta\tau - \Delta\tau') - (\alpha' - \alpha) + (T' - T) + (\lambda - \lambda') c + v b - v' b'}{\mu' - \mu}.$$

Mithin ist allgemein

$$33) . \Delta k = \frac{\pm(\tau - \tau') \pm (\Delta\tau - \Delta\tau') \pm (\alpha' - \alpha) + (T' - T) + (\lambda - \lambda') c + v b - v' b''}{\mu' \mu},$$

wo die oberen Zeichen für westliche Sterne zu nehmen sind.

B. Befindet sich das Rohr im zweiten oder dritten Quadranten, so wird man zur Bestimmung von Δ k den oberen Durchgang des einen Sternes mit dem unteren eines zweiten Sternes verbinden.

Befindet sich das Rohr im zweiten Quadranten, beobachtet man demnach westliche Sterne, so hat man für den Stern im oberen Durchgange (indem μ negativ ist)

$$T = (\tau + \Delta\tau) - \alpha + \lambda c + v b + \mu . \Delta k,$$

und für den zweiten Stern im unteren Durchgange

$$T' = (\tau' + \Delta\tau') - \alpha' + \lambda' c + v' b' - \mu \Delta k, \text{ somit}$$

$$T - T' = (\tau - \tau') + (\Delta\tau - \Delta\tau') + (\alpha' - \alpha) + (\lambda - \lambda') c + v b - v' b + (\mu + \mu') \Delta k, \text{ und}$$

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

$$\Delta k = \frac{(T - T') - (\tau - \tau') - (\Delta\tau - \Delta\tau') - (\alpha' - \alpha) + (\lambda' - \lambda) c + v' b - v b}{\mu + \mu'}.$$

Liegt das Rohr im dritten Quadranten, nimmt man demnach östliche Sterne, so findet man

$$\Delta k = \frac{(T - T') + (\tau - \tau') + (\Delta\tau - \Delta\tau') + (\alpha' - \alpha) + (\lambda' - \lambda) c + v' b' - v b}{\mu + \mu'}.$$

Man hat daher allgemein

$$(34) \quad . \quad \Delta k = \frac{(T - T') \pm (\tau - \tau') \pm (\Delta\tau - \Delta\tau') \pm (\alpha' - \alpha) + (\lambda' - \lambda) c + v' b - v b}{\mu + \mu'},$$

wo die oberen Zeichen für östliche Sterne zu nehmen sind.

Bezüglich der Glieder λ c, λ' c, v b und v' b' darf wohl nicht eigens bemerkt werden, dass sie mit Rücksicht auf die Glieder $\pm \lambda$ c und $\mp$ v b in den Gleichungen (27—30) und mit gehöriger Beachtung der Zeichen von λ, λ', v und v' in den Ausdrücken für T und T', woraus die Gleichungen (33) und (34) gebildet wurden, in Rechnung zu bringen sind.

Man sieht ferner, dass zur Bestimmung von Δ k Sterne zu wählen sind, welche einen möglich grossen Werth für $\mu' - \mu$ nnd $\mu + \mu'$ geben. Darauf gründet sich auch die oben gegebene Vorschrift über die Wahl der Sterne, wenn sich das Rohr im ersten oder vierten Quadranten befindet.

Da zur Bestimmung von Δ k die Lage des Rohrs den entwickelten Formeln zufolge in den beiden nördlichen Quadranten vortheilhafter ist, als in den beiden südlichen, so wird man, wenn es der Stand des Instrumentes erlaubt, zu diesem Zwecke vorzugsweise Sterne im zweiten oder dritten Quadranten anwenden.

Hat man nach den vorausgehenden Vorschriften b, c und Δ k gefunden, so hat man zur Bestimmung der Zeit, oder vielmehr der Uhrcorrection $\Delta\tau$ folgende Gleichungen:

I. Wenn das Rohr und das Südende sich auf verschiedenen Seiten des Meridianes befinden.

Für Fernrohr östlich:

$$(35) \quad . \quad . \quad . \quad \Delta\tau = \alpha - (T + \tau) \pm \lambda c \mp v b + \mu \Delta k,$$

für Fernrohr westlich:

$$(36) \quad . \quad . \quad . \quad \Delta\tau = (\alpha + T) - \tau \mp \lambda c \pm v b - \mu . \Delta k.$$

In diesen Formeln sind die oberen Zeichen zu nehmen
bei c, wenn der Mittelfaden südlich von der optischen Axe,
bei b, wenn das Südende über dem Horizonte steht.

II. Wenn Rohr und Südende auf derselben Seite des Meridianes stehen.

Für Fernrohr östlich:

$$(37) \quad . \quad . \quad . \quad \Delta\tau = \alpha - (T + \tau) \pm \lambda c \mp v b - \mu . \Delta k;$$

für Fernrohr westlich:

$$(38) \quad . \quad . \quad . \quad \Delta\tau = (\alpha + T) - \tau \mp \lambda c \pm v b + \mu . \Delta k.$$

Bezüglich der Zeichen von c und b gilt das früher Gesagte.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Für jeden beobachteten Stern erhält man mittelst einer dieser vier Gleichungen (35—38) einen Werth für die Uhrcorrection $\Delta\,\tau$.

Isi Δ k noch unbestimmt, so hat man so viele Gleichungen von der Form

$$m + \mu \,.\, \Delta\, k - \Delta\,\tau = o,$$

als man Sterndurchgänge beobachtet hat. Aus diesen Gleichungen lässt sich nach der Methode der kleinsten Quadratsummen $\Delta\,\tau$ und Δ k zugleich berechnen.

20.

Das Passage-Instrument mit der optischen Axe im ersten Vertical.

Wird das Passage-Instrument zur Bestimmung der geographischen Breite benützt, so muss bekanntlich die optische Axe des Rohrs möglichst nahe in den ersten Vertical gestellt werden. Man hat in diesem Falle $A = 90^0$, also $k = o^0$, mithin das Südende eines fehlerfreien Instrumentes im Meridiane.

Die Gleichungen (14) und (15) des §. 8 geben für $k = o$ sofort

für westliche Sterne:

$$(39) \quad . \quad . \quad . \quad T = (\tau + \Delta\,\tau) - \alpha \pm \frac{c}{\sin Z \sin \varphi} \mp \frac{b}{\tan Z \sin \varphi} \mp \frac{\Delta\, k}{\sin \varphi},$$

für östliche Sterne:

$$(40) \quad . \quad . \quad . \quad T = \alpha - (\tau + \Delta\,\tau) \pm \frac{c}{\sin Z \sin \varphi} \mp \frac{b}{\tan Z \sin \varphi} \mp \frac{\Delta\, k}{\sin \varphi}.$$

In diesen Gleichungen sind die oberen Zeichen zu nehmen:

bei c, wenn der Mittelfaden südlich von der optischen Axe,

bei b, wenn das Südende über dem Horizonte,

bei Δ k, wenn Stern und Südende auf derselben Seite des Meridianes liegen.

Die gefundenen Ausdrücke ergeben sich auch aus den Gleichungen (16) und (17) §. 12; denn im Dreiecke: Pol, Zenith und Stern im Azimuthe $= 90^0$ hat man

$$\cos \zeta = \sin T \,.\, \sin \varphi,$$

$$\cos \delta = \frac{\sin Z}{\sin T}, \text{ also}$$

$$\cos \zeta \,.\, \cos \delta = \sin Z \,.\, \sin \varphi,$$

welcher Werth, in den letztgenannten Gleichungen gesetzt, die Ausdrücke (39) und (40) gibt.

Um aus diesen Gleichungen T zu finden, muss b, c und Δ k bekannt sein.

Von der Bestimmung dieser Grössen wollen wir hier nur Folgendes anführen.

Bei dieser Lage der optischen Axe kann man c durch Beobachtung der Durchgangszeiten desselben Sternes in Ost und West finden, ohne zwischen den beiden Beobachtungen umzulegen.

Setzt man, um einen bestimmten Fall zu haben, das Azimuth des Südendes östlich und den Mittelfaden südlich von der optischen Axe, so hat man für die Beobachtung

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

in West: $T = \tau + \Delta\tau - \alpha + \frac{c}{\sin Z \sin \varphi} + \frac{b}{\tan g \sin \varphi} + \frac{\Delta k}{\sin \varphi}$,

in Ost: $T = \alpha - (\tau' + \Delta\tau') + \frac{c}{\sin Z \sin \varphi} + \frac{b'}{\tan g\ Z \sin} - \frac{\Delta k}{\sin \varphi}$,

somit, wenn man sich die wegen der Neigung der Rotationsaxe nöthigen Correctionen

$$\frac{b}{\tan g\ Z \sin \varphi} \text{ und } \frac{b'}{\tan g\ Z \sin \varphi}$$

in jeder der beiden Gleichungen an die Zeiten τ und τ' unmittelbar angebracht denkt

$$2\ T = (\tau - \tau') + (\Delta\tau - \Delta\tau') + \frac{2\ c}{\sin Z \sin \varphi}, \text{ und}$$

$$(41) \quad . \quad . \quad . \quad c = \sin \varphi \sin Z \left[T - \left(\frac{\tau - \tau'}{2}\right) - \left(\frac{\Delta\tau - \Delta\tau'}{2}\right)\right].$$

Den in dieser Gleichung vorkommenden Stundenwinkel T des beobachteten Sternes findet man aus

$$\cos\ T = \frac{\tan g\ \delta}{\tan g}, \text{ oder}$$

$$\tan g^2 \frac{T}{2} = \frac{\sin (\varphi + \delta)}{\sin (\varphi + \delta)}.$$

Subtrahirt man die obigen Gleichungen von einander, so hai man

$$o = (\tau + \tau') - 2\ \alpha + (\Delta\tau + \Delta\tau') + \frac{2\ \Delta\ k}{\sin \varphi},$$

wenn wir uns auch hier die Correction wegen der Neigung an die betreffenden Zeiten bereits angebracht denken.

Wir haben somit

$$42) \quad . \quad . \quad . \quad \Delta\ k = \sin \varphi \left[\alpha - \left(\frac{\tau + \tau'}{2}\right) - \left(\frac{\Delta\tau + \Delta\tau'}{2}\right)\right].$$

Die aus den Gleichungen (41) und (42) für c und Δ k erhaltenen Zeichen entscheiden beziehungsweise für die Lage des Mittelfadens und des Südendes gegen die optische Axe und den Meridian. Es zeigt ferner die für c erhaltene Gleichung (41), dass man bei der Bestimmung von c von dem Stande der Uhr unabhängig ist und nur ihren Gang zu kennen braucht; dass sich ferner zu dieser Bestimmung vorzugsweise Sterne eignen, die den ersten Vertical nahe am Zenith durchschneiden.

Bei der Bestimmung von Δ k muss sowohl der Stand als auch der Gang der Uhr bekannt sein und es sind hiezu Sterne zu wählen, die nahe am Aequator liegen, weil bei ihnen die Fädenantritte am schärfsten aufgefasst werden können.

21.

Schluss.

Ist b, c und Δ k bekannt, so geben die Gleichungen (39) und (40) den Stundenwinkel T eines jeden Sternes, der im ersten Vertical beobachtet wurde.

© Biodiversity Heritage Library, http://www.biodiversitylibrary.org/; www.biologiezentrum.at

Der Werth, den man für T erhält, kann noch durch die Fehler, welche allenfalls an den Werthen von c und Δ k haften, alterirt sein. Frei von diesen Fehlern jedoch erhält man den Stundenwinkel T eines Sternes, wenn man Letzteren in West und Ost beobachtet, und zwischen diesen beiden Beobachtungen das Instrument umlegt.

Setzen wir das Südende östlich vom Meridiane und man beobachte einen östlichen Stern, so hat man

$$T = \alpha - (\tau' + \Delta \tau') + \frac{c}{\sin Z \sin \varphi} - \frac{\Delta k}{\sin \varphi}.$$

Beobachtet man nach der Umlegung denselben Stern westlich, so hat man

$$T = (\tau + \Delta \tau) - \alpha - \frac{c}{\sin Z \sin \varphi} + \frac{\Delta k}{\sin \varphi}.$$

Die Correction wegen der Neigung der Rotationsaxe des Rohres denken wir uns bereits berücksichtigt.

Es gibt die Addition der beiden Gleichungen

$$2\,T = (\tau - \tau') + (\Delta \tau - \Delta \tau') \text{ und}$$

$$(43) \quad . \quad . \quad . \quad T = \left(\frac{\tau - \tau'}{2}\right) + \left(\frac{\Delta \tau - \Delta \tau'}{2}\right).$$

In dieser Gleichung für T entfallen c und Δ k, zugleich ist sie von dem Stande der Uhr vollkommen unabhängig und erfordert nur die genaue Kenntniss ihres Ganges.

Wäre dies nicht der Fall und gesetzt, man habe T wegen des Fehlers im Uhrgange um d T fehlerhaft gefunden, so wollen wir noch zum Schlusse untersuchen, welchen Einfluss dieser Fehler auf die Bestimmung der Polhöhe hat.

Man findet bekanntlich die Polhöhe aus der Gleichung

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{\text{tang}\, \delta}{\cos T}.$$

Differenziren wir diese Gleichung nach T, so haben wir

$$\frac{d\,\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{\text{tang}\, \delta \sin T}{\cos^2 T} \,.\, d\,T$$

$$\text{und wegen } \cos T = \frac{\text{t g}\, \delta}{\text{t g}\, \varphi} \text{ und}$$

$$\sin T = \frac{\sin Z}{\cos \delta} \text{ auch}$$

$$d\,\varphi = d\,T \,.\, \sin Z \,.\, \frac{\sin^2 \varphi}{\sin \delta}, \text{ endlich}$$

$$\text{wegen } \frac{\sin \varphi}{\sin \delta} = \frac{1}{\cos Z}, \text{ auch}$$

$$d\,\varphi = d\,T \,.\, \sin \varphi \,.\, \text{tang}\, Z.$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass der Fehler von φ bei entsprechender Wahl der Sterne immer kleiner als der Fehler des Stundenwinkels d T, und zwar desto kleiner sein wird, je näher der beobachtete Stern bei seinem Durchgange durch den ersten Vertical dem Zenithe steht.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn

Jahr/Year: 1861

Band/Volume: 01

Autor(en)/Author(s): Koller Marian Wolfgang

Artikel/Article: Ueber das Passage -Instrument 1-37