Beitrag zur Theorie der Röhrenlibelle.

Von

Dr. Marian Koller,

k. k. Ministerialrath etc, Ehrenmitglied des Vereines.

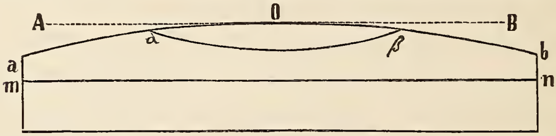
Vorgelegt am 11. Jänner 1865.

1.

Die Röhrenlibelle findet bei der Rectification der meisten Instrumente, welche die Geodäten und Astronomen zu ihren Messungen gebrauchen, so wie auch bei den Messungen selbst eine wesentliche Anwendung; es ist daher gewiss von hohem Interesse, die Theorie derselben mit möglichster Gründlichkeit zu erfassen. Hiezu einen Beitrag zu liefern, ist die folgende kleine Abhandlung bestimmt.

Bekanntlich besteht der wesentlichste Theil dieser Libelle in einer cylindrischen Gasröhre, deren innere Fläche concav geschliffen, und ihre äussere obere Fläche mit einer Scala versehen ist. Die Theile dieser Scala sind gleich und gewöhnlich von der Mitte der Röhre, nach links und rechts fortschreitend, beziffert.

Hydrostatischen Gesetzen gemäss wird die Blase der Libelle an jener Stelle der Röhre zur Ruhe kommen, welche die grösste Erhöhung über dem Horizonte hat. Legt man durch die geometrische Axe m n der Röhre (Fig. 1) eine verticale Ebene, welche die obere Wölbung der inneren Röhrenwand in der Curve a O b schneidet; ist



ferner O die Mitte zwischen den Anfangspuncten der rechts und links liegenden Abtheilungen der Scala und zugleich die Mitte der zur Ruhe gekommenen Blase, so wird — nach dem oben Gesagten — die durch O zu dieser Curve gelegte Tangente A B horizontal und der Krümmungshalbmesser der Curve in diesem Puncte vertical sein.

Ist ein Theilstrich der Scala $= \lambda$ der Krümmungshalbmesser in $O = \varrho$ (beide in demselben Längenmasse ausgedrückt) und ein Scalatheil am Puncte O in Bogensecunden gegeben $= \varphi$, so besteht die Gleichung

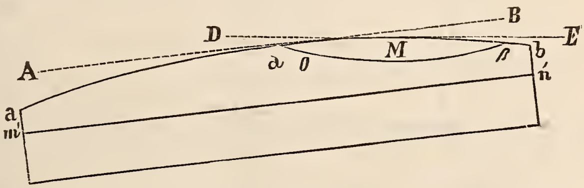
$$(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} \varrho \,.\, \varphi \sin 1'' = \lambda\,, \text{ also} \\ \varphi = \dfrac{\lambda}{\varrho \,.\, \sin 1''} = 206265 \,.\, \dfrac{\lambda}{\varrho}\,. \end{cases}$$

Die Scalatheile werden demnach nur dann alle denselben Werth im Bogenmasse haben, wenn ϱ eine Constante, mithin a O b ein Kreisbogen, ferner wird φ desto kleiner, mithin die Libelle desto empfindlicher sein, je grösser ϱ ist.

Deshalb suchen die Mechaniker der Curve a O b eine gleichförmige (Kreis-) Krümmung zu geben und ihren Halbmessern eine Länge zu ermitteln, welche die durch ein bestimmtes Instrument erreichbare Genauigkeit der Messungen fordert.

2.

Denken wir uns nun die Libellen-Axe gegen den Horizont geneigt, etwa in der Lage m' n' (Fig. 2), so dass M der höchste Punct der inneren Krümmung der Libelle und die die Curve a O b in M berührende Gerade, D E, horizontal, so ist die Neigung der Tangente A B am Puncte O (die Mitte der Libelle) zur horizontalen Tangente D E am Puncte M, oder — was einerlei ist — die Neigung der Libellenaxe m' n' gegen den Horizont dem Winkel gleich, welchen die aus dem Krümmungsmittelpuncte zu O und M gezogenen Halbmesser mit einander machen. Diese Neigung, in Scalatheilen ausgedrückt, ist demnach dem Bogen M O gleich. Da die Mitte der Blase in dem Puncte M und die beiden Enden in α und β liegen, so dass



$$M\,\alpha = M\,\beta \text{ ist, so hat man}$$
$$O\,M = O\,\beta - M\,\beta\,.$$

Ist die Lesung der Scala am

$$\text{Ende } \beta = r$$
$$\text{„} \quad \alpha = l\,,$$

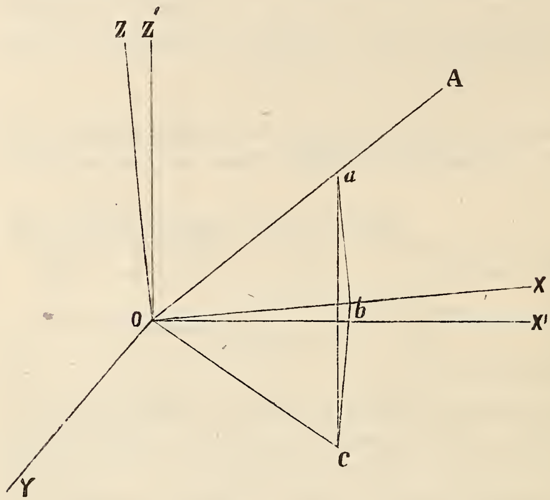
bezeichnet man ferner die Entfernung des Punctes O von jedem der beiden Anfangspuncte der Scala-Abtheilungen mit e, so ist die ganze Länge der Blase

$$\alpha\,\beta = 2\,e + r + l$$
$$M\,\beta = e + \frac{r + l}{2}$$
$$\underline{O\,\beta = e + r\,,\text{ also}}$$
$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad O\,M = \frac{r - l}{2}\,,$$ die Neigung der Libellenaxe gegen den Horizont in Theilen der Scala ausgedrückt.

3.

Um die Röhrenlibelle zur Bestimmung der Neigung von cylindrischen Axen (Geraden, Richtungen überhaupt) gebrauchen und dieselben oder auch Ebenen horizontal stellen zu können, wird ihr eine Fassung, die mit Füssen oder Hacken versehen ist, gegeben, mit denen sie auf eine Ebene oder Gerade gestellt oder auf letztere gehängt werden kann. (Setz- und Hängelibelle.) Wir wollen nun untersuchen, wie mit einer solchen Libelle die Neigung einer Geraden untersucht und bestimmt und ihre Horizontalität bewirkt werden kann.

Wir denken uns durch einen beliebigen Punct O im Raume (Fig. 3), den wir als Coordinatenanfangspunct annehmen, die Linie O X parallel zur Axe (Geraden), deren Neigung zu bestimmen ist, gezogen und nehmen zugleich O X als x-Axe an.



Durch O X legen wir eine verticale Ebene und ziehen in ihr O Z senkrecht auf O X als z-Axe, ferner O Y senkrecht auf die Ebene X O Z als Axe der y, die demnach horizontal sein wird; endlich zieht man O A parallel zur Axe der auf die Gerade, deren Neigung zu bestimmen ist, gesetzten oder gehängten Libelle.

Ist der Winkel, den A O mit O X macht, nämlich

$$\angle AOX = \omega,$$

der Winkel der Ebene A O X mit der x y-Ebene gleich i, so sind die Coordinaten des Punctes a der Geraden O A, wenn wir $Oa = 1$ annehmen

$$(3) \quad \ldots \quad \begin{cases} Ob = x = \cos\omega \\ bc = y = \sin\omega\cos i \\ ac = z = \sin\omega\sin i. \end{cases}$$

Setzt man die Neigung der Geraden O A zur x y-Ebene, nämlich

$\angle aOC = \gamma$, so ist auch

$$(4) \quad \ldots \quad z = \sin\gamma = \sin\omega\sin i.$$

Zieht man in der verticalen x z-Ebene die Gerade O X' horizontal und O Z' vertical und bezieht den Punct a auf das System der Coordinatenaxen

OX' OY und OZ',

nennt ferner die Coordinaten dieses Punctes im neuen Systeme x' y' z' und den Winkel $XOX' = \eta$, so hat man

$$x' = x\cos\eta - z\sin\eta$$
$$y' = y$$
$$z' = z\cos\eta + x\sin\eta$$

oder vermöge Gl. (3)

$$(5) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \cos\eta \cos\omega - \sin\eta \sin\omega \sin i \\ y' = \sin\omega \cos i \\ z' = \sin\eta \cos\omega + \cos\eta \sin\omega \sin i\,. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir endlich die Neigung der Linie O A gegen den Horizont mit h, so ist

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad \sin h = \sin\eta \cos\omega + \cos\eta \sin\omega \sin i\,.$$

4.

Ist $\omega_{,}$ der Winkel, den O A mit O X′ macht und $i_{,}$ die Neigung der Ebene A O X′ mit der x′ y′ - Ebene, so hat man

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \cos\omega_{,} \\ y' = \sin\omega_{,} \cos i_{,} \\ z' = \sin\omega_{,} \sin i_{,}\,. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen geben, mit den Gleichungen (5) verbunden

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad \cos\omega_{,} = \cos\eta \cos\omega - \sin\eta \sin\omega \sin i$$

$$(9) \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tang} i_{,} \cos i = \sin\eta \operatorname{cotang}\omega + \cos\eta \sin i$$

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad \sin h = \sin\omega_{,} \sin i_{,} = \sin\eta \cos\omega + \cos\eta \sin\omega \sin i \;; \text{ endlich}$$

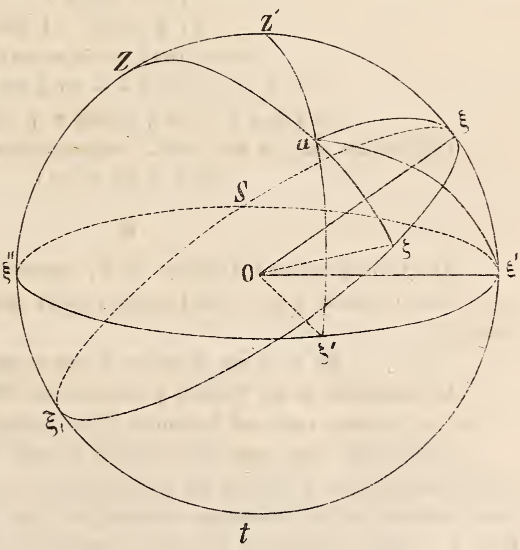
$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad \sin\omega_{,} \cos i_{,} = \sin\omega \cos i\,.$$

Die in §§. 3 und 4 gefundenen und durch die Gleichungen (4), (8), (9). (10) nnd (11) ausgedrückten Relationen der Linien O A und O X gelten auch für die Axe der Libelle und die Gerade, deren Neigung zu bestimmen ist, indem wir O A parallel zur Libellenaxe und O X parallel zu diesen Geraden annahmen.

5.

Dieselben Relationen können auch auf folgende Weise gefunden werden:

Beschreibt man um den Punct O als Mittelpunct eine Kugel vom Halbmesser = 1 und zieht von O aus eine Parallele zu der zu nivellirenden Axe, welche die Kugeloberfläche in ξ (Fig. 4) trifft; legt ferner durch O ξ eine verticale Ebene, von der die Kugeloberfläche im grössten Kreise ξ Z t geschnitten wird und zieht in dieser Ebene durch O eine Horizontale, deren Durchschnittspunct mit der Kugeloberfläche in ξ′ ist; legt durch die Geraden O ξ und O ξ′ auf



den grössten Kreis ξ Z t senkrechte Ebenen, welche die Kugel in den grössten Kreisen $\xi\,\zeta\,\xi_,$ und $\xi'\,\zeta\,\xi''$ schneiden; ist endlich Z der Pol des Kreises $\xi\,\xi_,\,\zeta$ und Z' des Kreises $\xi'\,\xi''\,\zeta$, so haben wir die Bögen

$$\xi\,Z = \xi'\,Z' = 90^0$$
$$\xi\,\xi' = Z\,Z' = \eta\,.$$

Trifft eine durch O gelegte zur Libellenaxe parallele Linie die Kugeloberfläche in a und legt man durch diesen Punct und durch die Puncte Z und Z' die Bögen grösster Kreise Z a ζ und Z' a ζ', so ist der Bogen

$$a\,\zeta = \gamma$$
$$a\,\zeta' = h\,.$$

Zieht man endlich die Bögen grösster Kreise a ξ und a ξ', so ist

$$a\,\xi = \omega \;\; ; \;\; a\,\xi' = \omega_,$$

und die sphärischen Winkel

$$a\,\xi\,\zeta = i \;\; ; \;\; a\,\xi'\,\zeta' = i_,\,.$$

Wir haben nun in dem bei ζ rechtwinkligen sphärischen Dreiecke a $\zeta\,\xi$:

$$\sin\gamma = \sin\omega\,\sin i$$

und im sphärischen Dreiecke a Z' ξ, wo

$$a\,Z' = 90^0 - h$$
$$Z\,\xi = 90^0 - \eta$$
$$a\,\xi = \omega \quad \text{und der Winkel}$$
$$a\,\xi\,Z' = 90^0 - i \text{ ist,}$$
$$\sin h = \sin\eta\,\cos\omega + \cos\eta\,\sin\omega\,\sin i\,.$$

Eben so ist im sphärischen Dreiecke a $\xi\,\xi'$, wo

$$a\,\xi = \omega \quad a\,\xi' = \omega_, \quad \xi\,\xi' = \eta$$

dann die Winkel

$$a\,\xi\,\xi' = 90^0 + i$$
$$a\,\xi'\,\xi = 90^0 - i_, \text{ sind}$$
$$\sin\omega_,\,\cos i_, = \sin\omega\,\cos i$$
$$\cos\omega_, = \cos\eta\,\cos\omega - \sin\eta\,\sin\omega\,\sin i$$
$$\cos i\,\operatorname{tang} i_, = \sin\eta\,\operatorname{cotang}\omega + \cos\eta\,\sin i\,.$$

Endlich hat man in dem bei ζ' rechtwinkligen Dreiecke a $\zeta'\,\xi'$

$$\sin h = \sin\omega_,\,\sin i_,\,.$$

6.

Zur Lösung unserer Aufgabe (§. 3), nämlich zur Bestimmung der Neigung einer Geraden gegen den Horizont, führt zunächst die gefundene Gleichung (6)

$$\sin h = \sin\eta\,\cos\omega + \cos\eta\,\sin\omega\,\sin i\,.$$

In denselben ist der Winkel η die gesuchte Grösse, welche aus ihm, wenn h i und ω gegeben sind, auf bekannte Weise gefunden werden kann.

Nun erhält man zwar den Winkel h nach dem oben (§. 2) Gezeigten unmittelbar aus der Ablesung des Blasenstandes der Libelle, wenn der Werth eines Scalatheiles im Bogenmasse bekannt ist; ein Gleiches findet aber für die Winkel ω und i nicht Statt, und wären auch diese Grössen anderweitig bekannt so macht schon der Umstand, dass die Bestimmung der Grösse η immerhin eine, wenn auch nicht schwierige, doch nicht ganz einfache Berechnung erfordert, diese Formel zur practischen Anwendung minder geeignet.

Es geht aber unsere Gleichung

$$\sin h = \sin \eta \cos \omega + \cos \eta \sin \omega \sin i$$

für $\omega = o$ in $\sin h = \sin \eta$ über, woraus unmittelbar $h = \eta$ folgt, indem es sich hier stets um Winkel handelt, die kleiner als 90^0 sind.

Hat man also die Axe der Libelle in der Fassung so gerichtet, dass sie auf eine Gerade gestellt oder gehängt stets mit dieser Geraden parallel ist, so gibt die Lesung an der Libelle unmittelbar die Neigung der Geraden gegen den Horizont.

7.

Um der Libellenaxe diese Stellung geben oder — wie man zu sagen pflegt — die Libelle rectificiren zu können, sind an ihrer Fassung Schräubchen angebracht, mittelst welchen die Axe in horizontaler und verticaler Richtung bewegt werden kann. Mit den in horizontaler Richtung wirkenden Schräubchen ändert man die Grösse i und mit den vertical wirkenden die Grösse ω.

Dieser Einrichtung entsprechend theilt man auch die Rectification der Libelle in zwei Operationen. Durch die erste wird der Winkel i gleich einem Rechten gemacht und somit die Libellenaxe mit der Geraden, auf die man sie gestellt oder gehängt hat, in eine und dieselbe verticale Ebene gebracht.

Durch die zweite Operation bringt man den Werth von ω auf Null, und stellt dadurch die Libellenaxe dieser Geraden parallel.

Bei der ersten Operation gibt der Beobachter, vor die Libelle gestellt, dieser eine sehr kleine Bewegung gegen oder von sich weg, jedoch immer so, dass die Füsse oder Hacken der Fassung in Berührung mit der Axe bleiben, auf welcher sich die Libelle befindet. Durch diese Bewegung erleidet der Winkel i eine Aenderung. Ist das rechts liegende Ende der Axe vom Beobachter weiter entfernt als das links liegende, so wird, wenn die Libelle gegen den Beobachter bewegt wird, der Winkel i wachsen, hingegen abnehmen, wenn sie von ihm entfernt wird.

Wächst der Winkel i, so wächst auch zufolge der Gleichung

$$\sin \gamma = \sin \omega \sin i$$

(da bei dieser Bewegung der Libelle der Winkel ω ungeändert bleibt) der Winkel γ und somit auf Grund der Gleichung

$$\sin h = \sin \eta \cos \omega + \cos \eta \sin \omega \sin i = \sin \eta \cos \omega + \cos \eta \sin \gamma$$

auch h und die Blase bewegt sich gegen das rechts liegende Ende der Libelle.

Nimmt der Winkel i ab, so kann auf demselben Wege gezeigt werden, dass sich die Blase gegen das linke Ende der Libelle bewegen wird.

Ist das links liegende Axenende das vom Beobachter entferntere, so wird, wenn sich die Libelle dem Beobachter nähert, i abnehmen, und wachsen, wenn sich die Libelle vom Beobachter entfernt; bei dieser Lage der Axe wird sich daher die Blase stets in entgegengesetzter Richtung mit den vorigen bewegen.

Wir können demnach allgemein sagen:

Wird die Libelle dem Beobachter genähert, so bewegt sich die Blase stets gegen das vom Beobachter entferntere Ende der Axe; gegen das näherliegende aber, wenn die Libelle von ihm entfernt wird.

Hat man durch einen auf die besprochene Weise gemachten Versuch die Lage der Libellenaxe erkannt, so wird man sie mit den entsprechenden Schräubchen im geforderten Sinne ändern und diese Correction so lange wiederholen, bis sich der Stand der Blase bei der erwähnten kleinen Bewegung der Libelle nicht mehr ändert, wo sich dann die Libellenaxe mit der Geraden in derselben verticalen Ebene befindet und $i = 90^0$ ist.

Differenziirt man nämlich die Gleichung

$$\sin h = \sin \eta \cos \omega + \cos \eta \sin \omega \sin i$$

nach i, da die Winkel ω und η im vorliegenden Falle constante Grössen sind, so hat man $\quad d\, h \cos h = \cos \eta \sin \omega \,.\, \cos i \,.\, d\, i\,,$

$$d\, h = \frac{\cos \eta \cos \omega}{\cos h} \,.\, \cos i \,.\, d\, i \,.$$

Für eine sehr kleine Aenderung $d\, i$ von i wird demnach $d\, h$ nur dann gleich Null, wenn $i = 90^0$.

Dieses folgt auch aus dem Umstande, dass für $i = 90^0$ der Werth von h ein Maximum wird.

Für $i = 90^0$ hat man nun:

$$\sin h = \sin \eta \cos \omega + \cos \eta \sin \omega$$

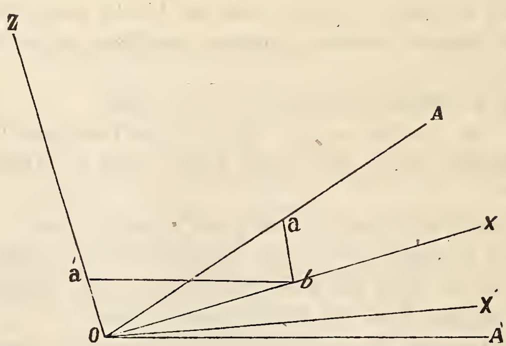
und Gl. (8) $\quad \cos \omega_{,} = \cos \eta \cos \omega - \sin \eta \sin \omega$, also

$$\sin h = \sin (\omega + \eta)$$

$$\cos \omega_{,} = \cos (\omega + \eta), \text{ folglich}$$

$$h = \omega' = \omega + \eta \,.$$

8.



Hat man die Axe der Libelle in die durch O X und O X′ (Fig. 5) gelegte verticale Ebene gebracht, und hat sie die Richtung O A, so ist

$\angle\, A O X = \omega$

$\angle\, X O X' = \eta$

$\angle\, A O X' = \omega_{,} =$

$= \omega + \eta = h\,.$

Ist die Lesung an den Blasenenden

rechts $= r$

links $= l$, so ist (§. 2)

$$h = \frac{r - l}{2} .$$

Es sei die Länge der Libelle = O a. Legt man die Libelle um, so dass das Ende O nach b, und das Ende a nach a' fällt, so ist wegen

$$O b = O b$$
$$a b = a' O$$
$$\angle a b O = \angle a' O b = 90^0 \text{ auch}$$

$\angle a' b O = \angle a O b = \omega$; die Libellenaxe hat demnach nach der Umlegung die gleiche Neigung zur Geraden O X wie vor derselben.

Ist die Neigung der Libellenaxe gegen den Horizont nach der Umlegung gleich h' und zieht man durch O die Gerade O A' zu a' b parallel, so ist

$$h' = \angle A' O X' = \angle A' O X - \angle X O X',$$

oder

$$h' = \omega - \eta .$$

Steht nach der Umlegung das Blasenende

rechts auf r'

links „ l', so ist

$$h' = \frac{l' - r'}{2} = - \frac{r' - l'}{2};$$

wir haben also die Gleichungen

$$\omega + \eta = \frac{r - l}{2}$$

$$\omega - \eta = - \frac{r' - l'}{2}, \text{ folglich}$$

$$(12) \quad . \; . \; . \quad \omega = \frac{r - l}{4} - \frac{r' - l'}{4} = \frac{(r - r') - (l - l')}{4}$$

$$(13) \quad . \; . \; . \quad \eta = \frac{r - l}{4} + \frac{r' - l'}{4} = \frac{(r + r') - (l + l')}{4} .$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich der folgende Lehrsatz:

Hat man die Röhrenlibelle in so weit rectificirt, dass ihre Axe mit der Geraden, auf welche sie gestellt oder gehängt wird, in dieselbe verticale Ebene fällt, so kann man mit ihr die Neigung (η) dieser Geraden gegen den Horizont finden, indem man den Stand der beiden Blasenenden vor und nach der Umlegung abliest und die Neigung (η) aus der Gleichung (13) berechnet.

9.

Um die zweite Operation bei der Rectification der Libelle durchzuführen, nämlich die Axe derselben parallel zur Geraden, auf der sie sich befindet, zu stellen, muss man die gefundene Neigung h der Libellenaxe gegen den Horizont um den Winkel ω vermindern. Ihre Neigung gegen den Horizont wird dann sein

$$\frac{r - l}{2} - \omega = \frac{r - l}{4} + \frac{r' - l'}{4} = \eta, \text{ welcher Werth}$$

der Neigung der Geraden gegen den Horizont gleich ist, somit die Libellenaxe zur Geraden parallel gestellt.

Man macht diese Correction mittelst der Schräubchen, welche die Lage der Libellenaxe in verticaler Richtung ändern, indem man die Mitte der Blase auf den Scalentheil η stellt, oder — wie man zu sagen pflegt — die Blase in η einspielen macht.

Da durch die zweite Correction der Libelle die erste gelitten haben könnte, so wird letztere wiederholt und so mit den Correctionen fortgefahren, bis beide mit der gewünschten Schärfe durchgeführt sind.

Will man, ohne die zweite Correction der Libelle vorgenommen zu haben, die Axe (Gerade), auf der sie sich befindet, horizontal stellen, so muss man die Neigung der Libellenaxe, nämlich $\frac{r - l}{2}$ um η vermindern; man findet dann

$$\frac{r - l}{2} - \eta = \frac{r - l}{4} - \frac{r' - l'}{4} = \omega \quad \text{als die Neigung}$$

der Axe der Libelle gegen den Horizont. Diese Grösse (Gl. 13) ist aber eben die Neigung der Libellenaxe zur Geraden, mithin diese horizontal.

Diese Stellung wird nicht durch die an der Libellenfassung befindlichen Schräubchen, sondern durch jene Schraube bewirkt, welche die Neigung der Geraden ändert.

Hat man die zweite Correction der Libelle ebenfalls vor der Horizontalstellung der Geraden durchgeführt, so steht, wie wir oben fanden, die Mitte der Blase auf

$$\eta = \frac{(r + r') - (l + l')}{4} .$$

Bei der Aenderung dieser Lesung um η wird demnach die Blase in O einspielen und es werden bei einer vollkommen rectificirten Libelle die Lesungen an beiden Enden der Blase, wenn Libellenaxe und Gerade horizontal stehen, einander gleich sein.

10.

Aus dem Gesagten ergeben sich auch sehr einfach die Lesungen an den beiden Blasenenden für eine bestimmte Stellung der Geraden auf welche die Libelle gesetzt wird und der Libellenaxe selbst.

1. Bezeichnet man, wenn die Axe der Libelle parallel zur Geraden gestellt ist, die Lesung am Blasenende

rechts mit R

links „ L, so ist nach dem früher Gezeigten

$$\frac{R - L}{2} = \frac{r - l}{4} + \frac{r' - l'}{4}, \quad \text{oder}$$

$$R - L = \frac{r - l}{2} + \frac{r' - l'}{2}, \quad \text{und vorausgesetzt,}$$

dass sich die Länge der Blase nicht geändert habe, ist zugleich

$$R + L = r + l = r' + l' .$$

Man erhält daher für R und L:

$$(14)\ \ldots \quad \begin{cases} R = \dfrac{3\,r + l}{4} + \dfrac{r' - l'}{4} \\[2ex] L = \dfrac{3\,l + r}{4} - \dfrac{r' - l'}{4}\,, \end{cases} \quad \text{und auch}$$

$$(15)\ \ldots \quad \begin{cases} R = \dfrac{3\,r' + l'}{4} + \dfrac{r - l}{4} \\[2ex] L = \dfrac{3\,l' + r'}{4} - \dfrac{r - l}{4}\,. \end{cases}$$

Es ist leicht einzusehen, dass

$$\frac{3\,r + l}{4} + \frac{r' - l'}{4} = \frac{3\,r' + l'}{4} + \frac{r - l}{4} \quad \text{sei;}$$

denn man hat

$$3\,r' + l' = 3\,(r' + l') - 2\,l' = 3\,(r + l) - 2\,l'\,, \quad \text{also}$$

$$\frac{3\,r' + l'}{4} + \frac{r - l}{4} = \frac{3\,(r + l) - 2\,l' + r - l}{4} =$$

$$= \frac{3\,r + l}{4} + \frac{l + r - 2\,l'}{4} = \frac{3\,r + l}{4} + \frac{l' + r' - 2\,l'}{4} =$$

$$= \frac{3\,r + l}{4} + \frac{r' - l'}{4}\,.$$

Eben so kann gezeigt werden, dass

$$\frac{3\,l' + r'}{4} - \frac{r - l}{4} = \frac{3\,l + r}{4} - \frac{r' - l'}{4} \quad \text{sei.}$$

Auf diese Lesungen Gl. (14) und (15) muss das rechte und linke Blasenende zu stehen kommen, wenn die Axe der Libelle parallel zur Geraden ist.

2. Wurde die Gerade in die horizontale Lage gebracht, ohne die Libellenaxe vorerst zu ihr parallel gestellt zu haben, und entsprechen für diese Richtung der Geraden die Lesungen

am Blasenende rechts $= R'$

„ „ links $= L'$, so hat man die Gleichungen

$$\frac{R' - L'}{2} = \frac{r - l}{4} - \frac{r' - l'}{4}$$

$$R' + L' = r + l = r' + l'\,, \quad \text{aus denen man erhält}$$

$$(16)\ \ldots \quad \begin{cases} R' = \dfrac{3\,r + l}{4} - \dfrac{r' - l'}{4} \\[2ex] L' = \dfrac{3\,l + r}{4} + \dfrac{r' - l'}{4}\,, \end{cases} \quad \text{oder auch}$$

$$(17)\ \ldots \quad \begin{cases} R' = \dfrac{3\,l' + r'}{4} + \dfrac{r - l}{4} \\[2ex] L' = \dfrac{3\,r' + l'}{4} - \dfrac{r - l}{4}\,. \end{cases}$$

Auf ähnliche Art, wie früher, kann auch hier gezeigt werden, dass

$$\frac{3\,r + l}{4} - \frac{r' - l'}{4} = \frac{3\,l' + r'}{4} + \frac{r - l}{4} \quad \text{und}$$

$$\frac{3\,l + r}{4} + \frac{r' - l'}{4} = \frac{3\,r' + l'}{4} - \frac{r - l}{4} \quad \text{ist}$$

Werden die Blasenenden auf diese Lesungen gestellt, so ist die Gerade horizontal.

3. Hat man die Libellenaxe parallel zur Geraden gestellt und will nun beide horizontal machen, so hat man die oben (Nr. 1) gefundenen Werthe von R und L um die Grösse

$$\eta = \frac{r - l}{4} + \frac{r' - l'}{4} \quad \text{zu ändern.}$$

Bezeichnet man die neuen Lesungen mit R″ und L″, so findet man

$$(18) \ldots \left\{ \begin{array}{l} R'' = R - \eta = \dfrac{r + l}{2} = \dfrac{r' + l'}{2} \\[2ex] L'' = L + \eta = \dfrac{r + l}{2} = \dfrac{r' + l'}{2}, \end{array} \right.$$

dem im §. 9 Gesagten entsprechend.

4. Hat man die Gerade zuerst horizontal gemacht und will dann auch die Libellenaxe horizontal stellen, so werden die (Nr. 2) gefundenen Werthe von R′ und L′ um die Grösse

$$\omega = \frac{r - l}{4} - \frac{r' - l'}{4} \quad \text{zu ändern sein.}$$

Sind die neuen Lesungen R‴ und L‴, so erhält man

$$(19) \ldots \left\{ \begin{array}{l} R''' = R' - \omega = \dfrac{r + l}{2} = \dfrac{r' + l'}{2} \\[2ex] L''' = L' + \omega = \dfrac{r + l}{2} = \dfrac{r' + l'}{2}, \end{array} \right.$$

wie früher.

11.

Man pflegt mit der Rectification der Instrumente, die man zum Behufe der mit ihnen zu machenden Messungen vornimmt, in der Regel auch eine Revision der Rectification der Libelle zu verbinden. Zu diesem Zwecke stellt man die Libellenaxe mit der Schraube, welche die Neigung der Axe, auf welche die Libelle gestellt oder gehängt wird, ändert so, dass die Lesungen r und l an den beiden Enden der Blase nicht bedeutend von einander abweichen und prüft zuerst (nach §. 7), ob Libellenaxe und Gerade (Axe, auf der sich die Libelle befindet) in einer verticalen Ebene liegen.

Sollte dies nicht der Fall sein, so verbessert man den vorhandenen Fehler auf die im genannten Paragraphe erläuterte Weise, und stellt dann mit derselben Schraube, wie früher, die Libellenaxe genau horizontal, so dass

$$r = l \quad \text{sein wird.}$$

Man legt nun die Libelle um und, gesetzt, man findet die Lesungen

$$\text{rechts} = r'$$
$$\text{links} = l'.$$

Nach dem (im §. 10 Nr. 1) Gezeigten muss allgemein, wenn die Libellenaxe zur Geraden parallel ist, dem rechtsliegenden Blasenende die Lesung

$$R = \frac{3\,r' + l'}{4} + \frac{r - l}{4}$$

und dem links liegenden die Lesung

$$L = \frac{3\,l' + r'}{4} - \frac{r - l}{4} \text{ entsprechen.}$$

Findet man bei der Umlegung, dass auch

$r' = l'$ ist, so ist die Libellenaxe auch parallel zur Geraden, mithin ebenfalls horizontal; denn führt man diese Gleichheit der Werthe r' und l' in unsere soeben angeführten Bedingungsgleichungen ein, so geben sie die Werthe

$R = L = r' = l'$ für den Parallelismus der genannten beiden Linien.

Sind aber r' und l' ungleich, so hat man, da $r = l$, auch

$$r + l = 2\,r = 2\,l = r' + l' \text{ und}$$

$$2\,(r - l') = r' - l'$$

$$\frac{r - l'}{2} = \frac{r' - l'}{4}.$$

Wir haben demnach

$$R = \frac{3\,r' + l'}{4} = r' - \frac{r' - l'}{4} = r' - \frac{r - l'}{2}$$

$$L = \frac{3\,l' + r'}{4} = l' + \frac{r' - l'}{4} = l' + \frac{r - l'}{2}.$$

Will man die Libellenaxe parallel zur Geraden stellen, so wird man die nach der Umlegung erhaltenen Lesungen r' und l' um die Grösse $\frac{r - l'}{2}$ zu ändern haben.

Will man schliesslich noch beide Richtungen horizontal machen, so hat man nach §. 10 Nr. 3 die soeben gefundenen Werthe

$$R = r' - \frac{r - l'}{2}$$

$$L = l' + \frac{r - l'}{2}$$ so zu ändern, dass die neuen Lesungen R'' und L''

$$R'' = L'' = \frac{r + l}{2} = \frac{r' + l'}{2} = r = l \text{ sind.}$$

Da nun

$$R'' = R - \frac{r - l'}{2} = (r' - \frac{r - l'}{2}) - \frac{r - l'}{2} = r' + l' - r = r = l$$

und

$$L'' = L + \frac{r - l'}{2} = (l' + \frac{r - l'}{2}) + \frac{r - l'}{2} = r = l,$$ so folgt die bekannte Regel:

Um die Gerade horizontal und zugleich die Libellenaxe parallel zur Geraden zu stellen, mache man die Libellenaxe mittelst der Schraube, welche die Neigung der Geraden ändert, horizontal, wo dann die Lesungen an den beiden Enden $r = l$ sind. Man lege dann die Libelle um und es stehen die Blasenenden auf r′ und l′. Nun verbessere man die Lesung r′ um $\frac{r-l'}{2} = \frac{r'-l'}{4}$ mittelst der Schräubchen an der Libelle, und dann um dieselbe Grösse mit der Schraube, welche die Neigung der Geraden gegen den Horizont ändert, so dass man für die Stände den Blasenenden wieder $r = l$ erhält. Hiemit ist die Libellenaxe parallel zur Geraden und beide zugleich horizontal gestellt.

12.

Um das in §§. 8—11 Gesagte mit einem Beispiele zu erläutern, setze man, es gebe die Libelle auf eine Axe gesetzt folgende Lesungen

$$r = 20 \qquad l = 8 \quad \text{und nach der Umlegung}$$
$$r' = 12 \qquad l' = 16\,,$$

so folgt aus Gl. (12) und (13)

$$\begin{array}{ll} r - r' = +8 & l - l' = -8 \\ r + r' = 32 & l + l' = 24\,, \quad \text{somit} \\ \hline \end{array}$$
$$\omega = +4$$
$$\eta = +2\,.$$

Zur Parallelestellung der Libellenaxe mit der Geraden, auf der sie sich befindet, hat man §. 10 Gl. (14) und (15):

$$\begin{array}{ll} \frac{3r + l}{4} = 17 & \frac{3r' + l'}{4} = 13 \\ \frac{r' - l'}{4} = -1 & \frac{r - l}{4} = +3 \\ \hline R = 16 & R = 16\,, \end{array}$$

ferner:

$$\begin{array}{ll} \frac{3l + r}{4} = 11 & \frac{3l' + r'}{4} = 15 \\ \hline L = 12 & L = 12\,. \end{array}$$

Will man Gerade und Libellenaxe horizontal stellen, so hat man §. 10 Nr. 3:

$$\begin{array}{ll} R = 16 & L = 12 \\ \eta = +2 & \eta = +2 \\ \hline R'' = 14 & L'' = 14\,. \end{array}$$

Um die Gerade, auf der sich die Libelle befindet, horizontal zu stellen, hat man §. 10 Gl. (16) und (17)

$$\begin{array}{ll} \frac{3r + l}{4} = 17 & \frac{3r' + l'}{4} = 15 \\ \frac{r' - l'}{4} = -1 & \frac{r - l}{4} = +3 \\ \hline R' = 18 & R' = 18\,, \end{array}$$

ferner:

$$\frac{3\,l + r}{4} = 11 \qquad \frac{3\,r' + l'}{4} = 13$$

$$L' = 10 \qquad L' = 10\,.$$

Soll nun auch die Libellenaxe horizontal gestellt werden, so hat man §. 10 Nr. 4

$$\begin{array}{ll} R' = 18 & L' = 10 \\ \omega = +4 & \omega = +4 \\ \hline R''' = 14 & L''' = 14\,. \end{array}$$

Will man endlich (nach §. 11) die Libellenaxe und Gerade einander parallel und zugleich horizontal stellen, so hat man

$$\begin{array}{ll} r = 14 & l = 14 \\ r' = 6 & l' = 22 \end{array}$$

$$\frac{r' - l'}{4} = \frac{r - l'}{2} = -4\,,$$ also die Lesungen,

wenn Libellenaxe und Gerade parallel

$$R = 10 \qquad L = 18\,,$$

und wenn beide zugleich horizontal sind

$$R'' = 14 \qquad L'' = 14\,.$$

13.

Die beiden in den §§. 7—9 gelehrten Correctionen werden allzeit durchzuführen sein, wenn die Röhrenlibelle zur Horizontalstellung cylindrischer Axen, zur Bestimmung ihrer Neigung, zur Ermittelung der Lage des Nullpunctes des Nonius gegen den Horizont bei den Alhidaden der Verticalkreise etc. etc. verwendet wird.

Gebraucht man selbe als Setzlibelle zur Horizontalstellung von Ebenen, so fällt die erste Correction (§. 7) weg, indem in diesem Falle ihre Axe nicht mit einer Linie oder Richtung, sondern mit allen in einer Ebene möglichen Richtungen, d. h. mit der Ebene selbst parallel sein muss, und daher nur die Correction im verticalen Sinne zur Herstellung dieses Parallelismus nothwendig ist.