## Theorie

der

## Beleuchtung krummer Flächen vom zweiten Grade

bei parallelen Lichtstrahlen.

Von

#### Emil Koutny.

1.

Die Beleuchtung krummer Flächen wird bekanntlich durch ein System von Linien, den Intensitäts-Linien oder Linien von gleicher Helle, angegeben, welche die Eigenschaft besitzen, dass die Tangirungs-Ebenen der Fläche in sämmtlichen Puncten einer solchen Linie mit der gegebenen Strahlenrichtung einen gleichen Winkel bilden, so dass daher die Fläche in allen Puncten einer Intensitäts-Linie denselben Grad von Helligkeit besitzt, indem die Intensität der Beleuchtung bei parallelen Lichtstrahlen einzig und allein von dem besagten Neigungswinkel  $\Omega$  abhängig ist. (Bei derselben Lichtquelle.)

Aus dem eben aufgestellten Bildungsgesetze der Intensitäts-Linien folgt, dass die durch sämmtliche Puncte einer Intensitäts-Linie an die krumme Fläche gelegten Berührungsebenen eine entwickelbare Fläche einhüllen, welche die gegebene Fläche in der in Rede stehenden Curve berührt.

Um den Grad der Helligkeit eines Punctes der Fläche durch eine Zahl ausdrücken zu können, nehmen wir die Intensität der Beleuchtung in jenen Puncten der Fläche, in welchen die Lichtstrahlen auf letztere senkrecht auffallen, als Einheit an, wodann, dem Obigen zu Folge, die Intensität der Beleuchtung in irgend einem anderen Puncte durch den Werth sin  $\Omega$  anzugeben sein wird.

2.

Es seien

$$\begin{aligned}
 x &= Az \\
 y &= Bz
 \end{aligned}$$

die Gleichungen des durch den Ursprung gehenden Lichtstrahls L.

Die Gleichung der Berührungsebene in einem Puncte x' y' z' der krummen Fläche f(x, y, z) = 0 ist

$$z - z' = \frac{\partial z'}{\partial x'} (x - x') + \frac{\partial z'}{\partial y'} (y - y'),$$

daher die Gleichungen einer durch den Ursprung gehenden, auf dieser Ebene senkrechten Geraden L'

$$x = -pz$$

$$y = -qz$$
wenn man  $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = q$  setzt.

Der Neigungswinkel  $\Omega$  des Lichtstrahls L mit der Berührungsebene wird daher am einfachsten durch seinen Complements-Winkel, den die Geraden L und L' einschliessen, bestimmt. Es ist sonach der Grad der Helle in dem angenommenen Puncte

$$\sin \Omega = \frac{1 - A p - B q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1} \sqrt{A^2 + B^2 + 1}}$$

Setzen wir der Kürze halber

$$\sqrt{A^2+B^2+1}$$
 .  $\sin \Omega = C$ 

so ist

C. 
$$\sqrt{p^2 + q^2 + 1} = 1 - Ap - Bq$$

oder

$$p^2$$
  $(C^2-A^2)+q^2$   $(C^2-B^2)+(C^2-1)-2ABpq+2Ap+2Bq=0$ . (1) die allgemeine Bedingungs-Gleichung für Linien gleicher Helle.

Werden aus der Gleichung der Fläche f(x, y, z) = 0 die partiellen Differential-Quotienten  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$  bestimmt, und diese Werthe für p und q in (1) gesetzt, so erhält man eine zweite Gleichung  $f_1(x, y, z) = 0$ , welche in Verbindung mit jener der Fläche, die Intensitäts-Linien selbst fixirt. Nachdem jedoch  $f_1(x, y, z) = 0$  für sich betrachtet, wieder eine krumme Fläche bestimmt, so ist ersichtlich, dass die Linien gleicher Helle einer Fläche auch als Durchschnitte dieser Fläche mit einem System gleichartiger anderer Flächen (1) betrachtet, und als solche dargestellt werden können.

3.

Soll die Grenzeurve zwischen Licht und Schatten, d. i. jene Intensitäts-Linie gesucht werden, in welcher die Lichtstrahlen die Fläche blos berühren, wodann der Neigungswinkel  $\mathfrak{I}2$ , also auch C gleich Null wird, so muss für diese Curve der obige Bruch, also auch dessen Zähler gleich Null werden, woraus

$$A p + B q = 1 \dots (2)$$

folgt.

Aus der Betrachtung der Gleichungen (1) und (2) ist schon ersichtlich, dass sich für diesen speciellen, jedoch wichtigsten Fall die Auffindung der Intensitäts-Linie wesentlich vereinfacht.

4.

Für die hellsten Puncte der Fläche muss auch sin  $\Omega$  den grössten Werth annehmen, d. h. im Allgemeinen gleich 1, also  $\Omega=90^{0}$  werden. Unter letzterer Voraussetzung ist

$$C^2 = A^2 + B^2 + 1$$
,

welcher Werth in (1) gesetzt,

 $p^2$   $(B^2 + 1) + q^2$   $(A^2 + 1) - 2ABpq + 2Ap + 2Bq + (A^2 + B^2) = 0$  oder in anderer Form geschrieben:

$$(Aq - Bp)^2 + (A + p)^2 + (B + q)^2 = 0,$$

gibt, was offenbar nur dann möglich wird, wenn jedes der drei Quadrate gleich Null, also

$$p = -A q = -B$$
 \ \tag{3}

ist. Für diesen Fall haben wir somit drei Bedingungs-Gleichungen  $\frac{\partial z}{\partial x} = -A$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -B$ , f(x, y, z) = 0, woraus ersichtlich wird, dass die hellste Beleuchtung im Allgemeinen blos in Puncten stattfindet, und nur dann eine hellst beleuchtete Curve erhalten wird, wenn zwei dieser Bedingungs-Gleichungen identisch werden.

Setzt man die eben gefundenen Werthe für A und B in die Gleichung des Lichtstrahls, welchen man sich durch diese Puncte x' y' z' hindurchgelegt denkt, so werden sodann dessen Gleichungen

$$x'-x'=-\frac{\partial z'}{\partial x'}(z'-z')$$

$$y - y' = -\frac{\partial z'}{\partial y'} (z - z')$$

in jene der Normalen in den betreffenden Puncten der Fläche übergehen, woraus folgt, dass die Normalen der hellst beleuchteten Puncte parallel zu den Lichtstrahlen sind.\*)

\*) Bei der Schattirung der Zeichnungen wird die Richtung der Lichtstrahlen zumeist im Grund und Aufriss unter 450 gegen die Projectionsaxe geneigt angenommen; für diesen speciellen Fall sind

$$\begin{aligned}
 x &= -z \\
 y &= z
 \end{aligned}$$

die Gleichungen des Lichtstrahls, also ist A=-1, B=+1 zu setzen, wodann  $C^2=3\sin^2\Omega$ ,  $C^2-A^2=C^2-B^2=C^2-1=3\sin^2\Omega-1$ , wird, und die Gleichung (1) in

$$(p^2 + q^2 + 1) (3 \sin^2 \Omega - 1) + 2 p q - 2 p + 2 q = 0$$

oder

$$(p^2 + q^2 + 1) \frac{3 \sin^2 \Omega - 1}{2} + pq - p + q = 0$$

übergeht.

Einen ähnlichen Ausdruck für eine andere Strahlenrichtung (x = z, y = z) gibt Herr O. Böklen in Dr. O. Schlömilch's "Zeitschrift für Mathematik und Physik" 3. Jahrgang, Seite 322, an.

Wir wollen nun die hier allgemein entwickelten Sätze bei den verschiedenen Flächen des zweiten Grades in Anwendung bringen.

## Ellipsoid.

5.

Die Gleichung des Ellipsoides, wenn das Coordinatensystem eine solche Lage hat, dass jede Coordinatenebene durch zwei Hauptaxen der Fläche gent, ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

daher wird,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z} = -\frac{x}{\epsilon_1 z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = q = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z} = -\frac{y}{\epsilon_2 z},$$

wenn wir nämlich

$$\varepsilon_1 = \frac{a^2}{c^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{b^2}{c^2}$$

setzen. Diese Werthe in (1) substituirt, geben

$$\frac{C^{2} - A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} x^{2} + \frac{C^{2} - B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} y^{2} + (C^{2} - 1) z^{2} - 2 \frac{AB}{\epsilon_{1}\epsilon_{2}} xy - 2 \frac{A}{\epsilon_{1}} xz - 2 \frac{B}{\epsilon_{2}} yz = 0 \dots (4)$$

als Bestimmungs-Gleichung der Intensitäts-Linien eines dreiaxigen Ellipsoids.

Dieselbe stellt jedoch, für sich betrachtet, ein System elliptischer Kegel vor, deren Mittelpuncte sich im Ursprung des Coordinatensystems befinden, also mit dem Mittelpunct des Ellipsoids zusammenfallen.

Diese Kegel schneiden sonach das Ellipsoid in den fraglichen Intensitäts-Linien und zwar in zwei congruenten Raum-Curven, von welchen die eine im beleuchteten, die andere im nicht beleuchteten Theile der Fläche liegt, wie dies auch aus der Symetrie des Ellipsoids folgt.

Auch erhellt hieraus, dass jedem Puncte einer Intensitäts-Linie diametral gegenüber ein zweiter Punct gelegen ist, der der gleichbezeichneten Intensitätslinie im andern Theile der Fläche angehört, was auch schon in dem Umstande seinen Grund findet, dass die Verbindungslinie der Berührungspuncte zweier parallelen Berührungsebenen eines Ellipsoids ein Diameter desselben ist.

6

Behufs der näheren Untersuchung obiger Kegelflächen wird es vor allem nothwendig sein, die Lage der Kegelaxe zu bestimmen. Hiezu dürfte am zweckmässigsten von solgenden Gesichtspuncten auszugehen sein.

Man wähle

$$x = Mz$$

$$y = Nz$$

als Gleichung einer geraden Linie L, zu welcher parallel an die Kegelfläche die möglichen Berührungsebenen gelegt werden sollen.

Wie bereits früher angegeben, ist sodann

$$M \frac{\partial z}{\partial x} + N \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

die Gleichung jener Ebene E, die durch die beiden Erzeugenden, in welchen die Berührung geschieht, führt. Soll nun die angenommene Gerade die Eigenschaft besitzen, dass sie senkrecht auf der fraglichen Kegelaxe steht und zugleich in einer der beiden Hauptebenen des Kegels liegt, mithin auf der zweiten Hauptebene senkrecht steht, so muss der Neigungswinkel der Geraden L mit der Ebene E, welche sodann eine Hauptebene des Kegels ist, 90° werden.

Aus (4) folgt:

$$\frac{C^2 - A^2}{\varepsilon_1^2} x - \frac{AB}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} y - \frac{A}{\varepsilon_1} x \frac{\vartheta z}{\vartheta x} - \frac{B}{\varepsilon_2} y \frac{\vartheta z}{\vartheta x} - \frac{A}{\varepsilon_1} z + (C^2 - 1) z \frac{\vartheta z}{\vartheta x} = 0$$

$$\frac{C^2 - B^2}{\varepsilon^2_2} y - \frac{AB}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} x - \frac{A}{\varepsilon_1} x \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{B}{\varepsilon_2} y \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{B}{\varepsilon_2} z + (C^2 - 1) z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

woraus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{C^2 - A^2}{\epsilon_1^2} x - \frac{A B}{\epsilon_1 \epsilon_2} y - \frac{A}{\epsilon_1} z}{\frac{A}{\epsilon_1} x + \frac{B}{\epsilon_2} y - (C^2 - 1) z}$$

$$\frac{0z}{\partial y} = \frac{\frac{C^2 - B^2}{\epsilon_2^2} y - \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} x - \frac{B}{\epsilon_2} z}{\frac{A}{\epsilon_1} x + \frac{B}{\epsilon_2} y - (C^2 - 1) z}.$$

Es ist somit.

$$M \left[ \frac{C^2 - A^2}{\epsilon_1^2} x - \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} y - \frac{A}{\epsilon_1} z \right] + \left[ \frac{C^2 - B^2}{\epsilon_2^2} y - \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} x - \frac{B}{\epsilon_2} z \right] + \left[ (C^2 - 1) z - \frac{A}{\epsilon_1} x - \frac{B}{\epsilon_2} y \right] = 0$$

oder nach x, y und z geordnet,

$$x \left[ M \frac{C^2 - A^2}{\epsilon_1^2} - N \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{A}{\epsilon_1} \right] + y \left[ N \frac{C^2 - B^2}{\epsilon_2^2} - M \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{B}{\epsilon_2} \right] + z \left[ (C^2 - 1) - M \frac{A}{\epsilon_1} - N \frac{B}{\epsilon_2} \right] = 0$$

die Gleichung der Ebene E.

Soll diese auf der Geraden L senkrecht stehen, so müssen die Tracen derselben senkrecht auf den bezüglichen Projectionen der Geraden sein, woraus die beiden Bedingungsgleichungen

$$M = \frac{M \frac{C^2 - A^2}{\epsilon_1^2} - N \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{A}{\epsilon_1}}{(C^2 - 1) - M \frac{A}{\epsilon_1} - N \frac{B}{\epsilon_2}}$$

$$N = \frac{N \frac{C^2 - B^2}{\epsilon_2^2} - M \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{B}{\epsilon_2}}{(C^2 - 1) - M \frac{A}{\epsilon_1} - N \frac{B}{\epsilon_2}}$$

oder nach M und N geordnet

$$M^{2} \frac{A}{\epsilon_{1}} + MN \frac{B}{\epsilon_{2}} + M \left[ \frac{C^{2} - A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} - C^{2} + 1 \right] - N \frac{AB}{\epsilon_{1}\epsilon_{2}} - \frac{A}{\epsilon_{1}} = 0. (5)$$

$$N^{2} \frac{B}{\epsilon_{2}} + MN \frac{A}{\epsilon_{1}} + N \left[ \frac{C^{2} - B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} - C^{2} + 1 \right] - M \frac{AB}{\epsilon_{1}\epsilon_{2}} - \frac{B}{\epsilon_{2}} = 0. (6)$$
resultiren.

Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen ergeben sich die Neigungswinkel der Projectionen einer durch den Ursprung gehenden Geraden mit den Coordinatenaxen, durch welche auch diese Gerade bestimmt ist. Während nun die eine Hauptebene des Kegels durch den Ursprung geht und auf der eben gefundenen Geraden senkrecht steht, ist die andere Hauptebene durch besagte Gerade senkrecht auf die erste zu führen.

Bemerkung: Die Unbekannten M und N können durch Auflösung der aus (5) und (6) sich ergebenden Gleichungen

$$\begin{split} \mathit{M}^{3} & \frac{A}{\epsilon_{1}} \left( \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} - \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} \right) + \mathit{M}^{2} \left\{ \left[ \frac{C^{2} - A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} - C^{2} + 1 \right] \left( \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} - \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} \left( \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} - 1 \right) + \frac{B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} \left( \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} - 1 \right) \right\} + \\ & \left. + \mathit{M} \cdot \frac{A}{\epsilon_{1}} \left\{ \left[ \frac{C^{2} - A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} - C^{2} + 1 \right] \left( \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} - 1 \right) - \left( \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} - \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} \left( \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} - 1 \right) \right\} - \frac{A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} \left( \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} - 1 \right) = 0 \dots (7) \\ \mathit{N}^{3} & \frac{B}{\epsilon_{2}} \left( \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} - \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} \right) + \mathit{N}^{2} \left\{ \left[ \frac{C^{2} - B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} - C^{2} + 1 \right] \left( \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} - \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} \left( \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} - 1 \right) + \frac{B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} \left( \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} - 1 \right) \right\} + \\ & \left. + \mathit{N} \cdot \frac{B}{\epsilon_{2}} \left\{ \left[ \frac{C^{2} - B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} - C^{2} + 1 \right] \left( \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} - 1 \right) - \left( \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} - \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} \left( \frac{1}{\epsilon_{2}^{2}} - 1 \right) \right\} - \frac{B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} \left( \frac{1}{\epsilon_{1}^{2}} - 1 \right) = 0 \dots (8) \end{split}$$

berechnet oder constructiv derart dargestellt werden, dass man entweder die Wurzeln dieser Gleichungen (9 und 10) als Ordinaten der Durchschnitte einer constanten Parabel mit einem sich mit jedem Werthe von C ändernden Kreise aufsucht, oder die Coordinaten M und N der Durchschnittspuncte der beiden durch (5 und 6) gegebenen Kegelschnittslinien bestimmt.\*)

Untersucht man die eben bezeichneten Relationen (5 und 6), so findet man, dass dieselben Hyperbeln darstellen; denn betrachtet man z. B. die Gleichung (5), substituirt darin x für M, y für N, so dass dieselbe die Form

$$x^2 \frac{A}{\epsilon_1} + xy \frac{B}{\epsilon_2} + x \left[ \frac{C^2 - A^2}{\epsilon_1^2} - C^2 + 1 \right] - y \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} - \frac{A}{\epsilon_1} = 0$$

annimmt, und sucht den Durchschnitt derselben mit der Y-Axe, so erhält man

$$x = 0, \quad y = -\frac{b^2}{c^2 B} = \frac{-\epsilon_2}{B},$$

woraus ersichtlich wird, dass sämmtliche Hyperbeln (5) sich in einem Puncte der Y-Axe, welcher um die Länge —  $\frac{\varepsilon_2}{B}$  vom Ursprunge entfernt ist, schneiden, (weil der eben gefundene Werth von C unabhängig ist).

Differentirt man die Gleichung und setzt  $x=o, \quad y=\frac{-\epsilon_2}{B},$  so findet man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot x \cdot \frac{A}{\epsilon_1} + y \cdot \frac{B}{\epsilon_2} + \frac{C^2 - A_2}{\epsilon_1^2} - C^2 + 1}{\frac{AB}{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} - x \cdot \frac{B}{\epsilon_2}}$$

also

$$\frac{dx}{dy} = \frac{AB\epsilon_1^2}{C^2(1-\epsilon_1^2)-A^2} \cdot \frac{1}{\epsilon_2}$$

Letztere Relation gibt die Tangente des Neigungswinkels an, unter welchem die in Rede stehende Curve die Y-Axe schneidet.

Sind a und b die Coordinaten des Mittelpunctes der Curve, so ist behufs deren Bestimmung für x und y beziehungsweise x + a und y + b in die Gleichung der Curve zu setzen; dieselbe übergeht sodann in

$$x^{2} \frac{A}{\epsilon_{1}} + xy \frac{B}{\epsilon_{2}} + x \left[ 2a \frac{A}{\epsilon_{1}} + b \frac{B}{\epsilon_{2}} + \frac{C^{2} - A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} - C^{2} + 1 \right] +$$

$$+ y \left[ a \cdot \frac{B}{\epsilon_{2}} - \frac{AB}{\epsilon_{1}\epsilon_{2}} \right] +$$

$$+ \left[ a^{2} \frac{A}{\epsilon_{1}} + ab \frac{B}{\epsilon_{2}} + a \frac{C^{2} - A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} - a C^{2} + a - b \frac{AB}{\epsilon_{1}\epsilon_{2}} - \frac{A}{\epsilon_{1}} \right] = 0$$

<sup>\*)</sup> Dass in beiden Fällen vorerst eine beliebige Länge als Einheit angenommen werden muss, ist selbstverständlich.

Da jedoch die ersten Potenzen der Unbekannten entfallen müssen, so haben wir zur Bestimmung der Coordinaten des Mittelpunctes

$$a \cdot \frac{B}{\epsilon_2} - \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} = 0$$

$$2 \cdot \frac{A}{\epsilon_1} \cdot a + b \cdot \frac{B}{\epsilon_2} + \frac{C^2 - A^2}{\epsilon_1^2} - C^2 + 1 = 0$$

und aus diesen die Werthe

$$a := \frac{A}{\epsilon_1}$$

$$b = \frac{\epsilon_2}{B} \left\{ C^2 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_1^2} \right) - \left( 1 + \frac{A^2}{\epsilon_1^2} \right) \right\}.$$

Aus den so gefundenen Coordinaten - Werthen ist ersichtlich, dass die Mittelpuncte sämmtlicher Hyperbeln (5) in einer zur Y-Axe parallelen Geraden liegen, die vom Ursprunge um die Grösse  $\frac{A}{\epsilon_1}$  entfernt ist.

Wird das Coordinatensystem parallel in den Mittelpunct verschoben, so ist die Gleichung der Hyperbel

$$x^2 \frac{A}{\epsilon_1} + xy \frac{B}{\epsilon_2} + \frac{A}{\epsilon_1} C^2 \left( \frac{1}{\epsilon_1^2} - 1 \right) = 0.$$

Die eine Asymptote derselben ist die neue Y-Axe, und der halbe Asymptoten-Winkel  $\varphi$  durch die Gleichung

$$tg \ \varphi = - \frac{Ba^2}{Ab^2} = - \frac{B\epsilon_1}{A\epsilon_2}$$

gegeben. Sämmtliche Hyperbeln haben sonach denselben Asymptotenwinkel  $\varphi$  und eine constante Asymptote, die neue Ordinatenaxe.

Aus den bekannten Asymptoten und dem gemeinschaftlichen Schnittpuncte sämmtlicher Hyperbeln mit der früheren Y-Axe nebst der zugehörigen Tangente, lässt sich die Curve leicht verzeichnen.

Eine gleiche Entwicklung kann mit der Gleichung (6) durchgeführt werden, wobei sich ähnliche Resultate ergeben.

Zu bemerken ist noch, dass die die Intensitäts-Linien bildenden Kegelflächen eines Ellipsoids keine gemeinschaftliche Axe besitzen, wie dies aus den Relationen (5 und 6) oder (7 und 8) ersichtlich ist, da die Werthe von M und N von C abhängig sind, sich also auch mit dieser Grösse ändern.

7.

Ersichtlicher gestaltet sich die Untersuchung, wenn man die Kegelfläche (4) auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem derart bezieht, dass man die Coordinatenebene XY sowohl als auch die Z-Axe beibehält, die neue X-Axe und Y-Axe jedoch um den Ursprung in der Ebene XY dreht, so dass die beiden X-Axen den Winkel  $\alpha$ , die beiden Y-Axen den Winkel  $\beta$  mit einander bilden.

Unter dieser Voraussetzung hat man in (4) anstatt

$$x \dots x \cos \alpha - y \sin \beta$$
  
 $y \dots x \sin \alpha + y \cos \beta$ 

zu setzen, wodann diese Gleichung die Form

$$x^{2} \left[ \frac{C^{2} - A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} \cos^{2}\alpha + \frac{C^{2} - B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} \sin^{2}\alpha - 2 \frac{AB}{\epsilon_{1}} \frac{B}{\epsilon_{2}} \sin \alpha \cos \alpha \right] +$$

$$+ y^{2} \left[ \frac{C^{2} - A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} \sin^{2}\beta + \frac{C^{2} - B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} \cos^{2}\beta + 2 \frac{AB}{\epsilon_{1}\epsilon_{2}} \sin \beta \cos \beta \right] -$$

$$- 2 xy \left[ \frac{C^{2} - A^{2}}{\epsilon_{1}^{2}} \cos \alpha \sin \beta - \frac{C^{2} - B^{2}}{\epsilon_{2}^{2}} \sin \alpha \cos \beta +$$

$$+ \frac{AB}{\epsilon_{1}\epsilon_{2}} \left( \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \right) \right] - 2 xz \left[ \frac{A}{\epsilon_{1}} \cos \alpha + \frac{B}{\epsilon_{2}} \sin \alpha \right] -$$

$$- 2 yz \left[ -\frac{A}{\epsilon_{1}} \sin \beta + \frac{B}{\epsilon_{2}} \cos \beta \right] + (C^{2} - 1) z^{2} = 0$$

annimmt.

Wählt man die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  derart, dass die Producte xy und yz entfallen, so sind

$$\frac{C^2 - A^2}{\epsilon_1^2} \cos \alpha \sin \beta - \frac{C^2 - B^2}{\epsilon_2^2} \sin \alpha \cos \beta + \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} \cos \alpha \cos \beta - \frac{AB}{\epsilon_1 \epsilon_2} \sin \alpha \sin \beta = 0,$$

$$-\frac{A}{\epsilon_1} \sin \beta + \frac{B}{\epsilon_2} \cos \beta = 0$$

die bezüglichen Bedingungsgleichungen, aus welchen

$$tg \ \alpha = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cdot \frac{B}{A} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{B}{A}$$

$$tg \ \beta = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \cdot \frac{B}{A} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{B}{A}$$

folgt.

Mit diesen Werthen übergeht die obige Gleichung in folgende:

$$x^{2} \frac{C^{2} - A^{2} - B^{2}}{a^{4} A^{2} + b^{4} B^{2}} c^{4} + y^{2} \frac{c^{4} C^{2}}{a^{4} B^{2} + b^{4} A^{2}} + z^{2} \frac{C^{2} - 1}{A^{2} + B^{2}} - 2 xz \frac{c^{2}}{\sqrt{a^{4} A^{2} + b^{4} B^{2}}} = 0 \dots (10)$$

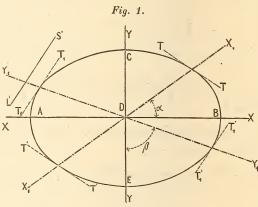
Nachdem  $\alpha$  und  $\beta$  von C unabhängig sind, und aus (10) ersichtlich ist, dass jede durch (10) dargestellte Kegelfläche sowohl von zur Coordinaten-Ebene YZ, als auch von zur Coordinaten-Ebene XY parallelen Ebenen nach Kegelschnittslinien geschnitten wird, welche sich auf den bezüglichen Coordinaten-Ebenen (parallel zu jener Axe, welche nicht in dieser Ebene liegt) derart projectien, dass die Mittelpuncte sämmtlicher Projectionen beziehungsweise in die

Axen Z oder X fallen, so ist klar, dass jene conjugirten Kegelaxen, welche die Mittelpuncte der zu den genannten Projections-Ebenen parallelen Schnitte der Kegel verbinden, für alle einem Ellipsoide zugehörigen Kegel in einer und derselben, durch die Gleichung

$$y = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{B}{A} x$$

bestimmten Verticalebene, welche die neue Coordinaten-Ebene XZ bildet, gelegen sind.

Sind nämlich XX, YY die beiden horizontalen Axen des ursprünglichen Coordinaten-Systems, ist ferner die Ellipse ACEB der horizontale Hauptschnitt des Ellipsoids, also AD = a, CD = b und L'S' die horizontale Projection des Lichtstrahls, welche mit der X-Axe den Winkel S'L'D = z einschliesst, so ist offenbar



$$tgz = \frac{B}{A}$$

Aus den Gleichungen (9) ist nun

$$tg\alpha = \frac{b^2}{a^2} tg\alpha = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{tg\alpha'}\right)$$

wenn

$$tg \ n' = -\frac{1}{tg \ n}$$

Die letzte Relation zeigt, dass z' der Neigungswinkel einer auf L'S' senkrechten Geraden TT ist, und der erstere Ausdruck (für tg  $\alpha$ ) gibt an, dass die neue X-Axe  $X_1X_1$  mit dem Durchmesser der Ellipse ACBE, welcher den auf L'S' senkrechten Sehnen conjugirt ist, zusammenfällt. Wir werden daher zur Bestimmung dieser Axe blos die beiden auf L'S' senkrechten Tangenten TT und T'T' an den horizontalen Hauptschnitt des Ellipsoids zu ziehen, und die Berührungspuncte zu verbinden haben.

Da der Winkel, den die neue Y-Axe  $Y_1 Y_1$  mit der Axe YY einschliesst,  $\beta$  ist, so ist der Neigungswinkel  $Y_1 D$ -X der ersteren gegen die Axe X'X offenbar  $90 + \beta$ ; es wird demgemäss

$$tg \beta = -\frac{1}{tg (90 + \beta)} = \frac{a^2}{b^2} \cdot tg z,$$

oder

$$tg (90 + \beta) = -\frac{b^2}{a^2 t g z}$$

woraus ersichtlich wird, dass die Axe  $Y_1$   $Y_1$  zur Richtung L' S' conjugirt ist, dass man also blos die Berührungspuncte der beiden, zur horizontalen Projection des Lichtstrahls parallelen Tangenten  $T_1$   $T_1$ ,  $T'_1$   $T'_1$  des horizontalen Hauptschnittes mit einander zu verbinden hat, um die neue Coordinatenaxe  $Y_1$   $Y_1$  zu erhalten.

Behufs der Fixirung der vorerwähnten, in der Ebene XZ gelegenen, zur Richtungsebene XY conjugirten Kegelaxe, denken wir uns den Kegel durch eine beliebige, im Abstande m vom Ursprung liegende Horizontalebene und durch di Coordinatenebene XZ geschnitten. Zu diesem Behufe haben wir in (10) y=o, z=m zu setzen und x zu bestimmen. Wir erhalten diesfalls

$$\frac{c^2}{a^4} \frac{C^2 - A^2 - B^2}{a^4 A^2 + b^4 B^2} c^4 - 2 mx \frac{c^2}{\sqrt{a^4 A^2 + b^4 B^2}} = -m^2 \frac{C^2 - 1}{A^2 + B^2}.$$

Die zu suchende Axe wird offenbar durch den Halbirungspunct der Verbindungslinie der beiden in obigen Ebenen und in der Kegelfläche gelegenen Puncten gehen, dessen Abscisse dem arithmetischen Mittel  $\frac{x_1 + x_2}{2}$  der beiden sich aus der letzen Gleichung ergebenden Wurzeln gleichkommt; wir haben demgewäss

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = m \frac{\sqrt{a^4 A^2 + b^4 B^2}}{c^2 (C^2 - A^2 - B^2)}$$

daher der Winkel \u03c3, welchen die verlangte Axe mit der X-Axe bildet,

$$tg \ \varphi = \frac{2m}{x_1 + x_2} = \frac{c^2}{\sqrt{a^4 A^2 + b^4 B^2}} \cdot (C^2 - A^2 - B^2) \dots (11)$$

Für die Grenzeurve zwischen dem beleuchteten und im Schatten befindlichen Theil der Fläche ist die Formel (2) zu benützen, oder C=0 in (4) zu substituiren, In beiden Fällen erhält man

$$\frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 0 \dots (12)$$

Es übergeht diesfalls der Kegel in eine Ebene und zwar in eine Diametral-Ebene des Ellipsoides, woraus folgt, dass die Selbstschattengrenze die einzige ebene Intensitätscurve der Fläche ist.

Wird zu gleichem Zwecke die Formel (10) benützt, so findet man

$$x^{2} c^{4} \frac{A^{2} + B^{2}}{a^{4} A^{2} + b^{4} B^{2}} + z^{2} \cdot \frac{1}{A^{2} + B^{2}} + 2xz \frac{c^{2}}{\sqrt{a^{4} A^{2} + b^{4} B^{2}}} = 0$$

oder

$$\left(x.\ c^2\ \sqrt{\frac{A^2+B^2}{a^4\ A^2+b^4\ B^2}}\ +\ \frac{z}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 0$$

60

und hieraus

$$x = z$$
.  $\frac{\sqrt{a^4 A^2 + b^4 B^2}}{c^2 (A^2 + B^2)}$ ....(13)

welches die Gleichung einer zur Y-Axe parallelen Ebene ist, woraus hervorgeht, dass durch die in (7) vorgenommene Transformation des Coordinatensystems die Y-Axe eine zur Horizontaltrace der Selbstschattengrenzebene parallele Lage erhielt. Diese Horizontaltrace selbst ergibt sich durch Substitution des Werthes z = 0 in (12):

$$\frac{Ax}{a^2} + \frac{By}{b^2} = 0$$

oder

$$\frac{x}{y} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{B}{A}$$

welcher Ausdruck mit dem für  $tg\beta$  gefundenen Werthe, mit Berücksichtigung dessen, dass  $\frac{x}{y} = tg$  (180 –  $\beta$ ) sein muss, vollkommen übereinstimmt, wodurch das eben Gesagte gleichfalls erwiesen erscheint.

9.

Für die hellst erleuchteten Puncte haben wir nach (3) die Gleichungen:

$$\frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z} = A$$

$$\frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z} = B$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

und hieraus.

$$x = \pm \frac{a^{2} A}{\sqrt{a^{2} A^{2} + b^{2} B^{2} + 1}}$$

$$y = \pm \frac{b^{2} B}{\sqrt{a^{2} A^{2} + b^{2} B^{2} + 1}}$$

$$z = \pm \frac{c^{2}}{\sqrt{a^{2} A^{2} + b^{2} B^{2} + 1}}$$
(14)

als deren Coordinaten, folglich ist die Gleichung der Verbindungslinie dieser beiden Puncte

$$x = \frac{a^2 A}{c^2} \cdot z$$
$$y = \frac{b^2 B}{c^2} \cdot z$$

und diese selbst ein Diameter der Fläche, welcher den auf den Lichtstrahl senkrechten Ebenen

$$Ax + By + z = D$$

conjugirt ist. Wie die letzt gefundenen Gleichungen zeigen, sind die Projectionen dieses Diameters zugleich die zu den Richtungen der entsprechenden Tracen dieser Ebene conjugirten Durchmesser jener Ellipsen, in welchen die Fläche durch die betreffenden Coordinatenebenen geschnitten wird.

Die horizontale Projection dieses Diameters ist

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2 B}{a^2 A} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{B}{A} = tg \ \alpha$$

welche Relation anzeigt, dass die Ebene XZ des neuen Coordinatensystems die hellst beleuchteten Puncte der Fläche enthält.

In 8 und 9 haben wir somit die Beziehungen des neuen Coordinaten-Systems zu den hellsten Puncten und zur Selbstschattengrenze der Fläche erörtert,

10.

Wird  $\varepsilon_1 = 1$ , oder  $\varepsilon_2 = 1$ , oder  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , so wird für den ersten Fall die Gleichung (7), für den zweiten die Gleichung (8), für den dritten Fall endlich das Verhältniss  $\frac{M}{N}$  von C unabhängig. Hieraus folgt, dass die wahren Axen der die Intensitätslinien bestimmenden Kegel bei Rotations Ellipsoiden sämmtlich in einer zur Rotationsaxe parallelen Ebene gelegen sind.

Fassen wir der Fall  $\epsilon_1 = \epsilon_2$  näher ins Auge, wo a=b ist, die Rotations-Axe somit mit der Z-Axe zusammenfällt, und wenden hiefür die in (7) entwickelten Sätze an, so gestalten sich dieselben folgendermassen. Es wird

$$tg \alpha = tg \beta = \frac{B}{A}$$
, also  $\alpha = \beta = z$ ,

d. h. das neue Goordinatensystem bleibt beim Rotations-Ellipsoide rechtwinklig und wird blos durch Drehung des ursprünglichen Systems um die Z-Axe erhalten. Nach der Drehung hat die Coordinatenebene XZ eine zu den Lichtstrahlen parallele Lage. Es wird sodann

$$x^{2} \left(\frac{c}{a}\right)^{4} \frac{C^{2} - A^{2} - B^{2}}{A^{2} + B^{2}} + y^{2} \left(\frac{c}{a}\right)^{4} \frac{C^{2}}{A^{2} + B^{2}} + z^{2} \cdot \frac{C^{2} - 1}{A^{2} + B^{2}} - 2xz \left(\frac{c}{a}\right)^{2} \frac{1}{\sqrt{A^{2} + B^{2}}} = 0$$

oder

$$x^{2} (C^{2} - A^{2} - B^{2}) + C^{2}y^{2} + z^{2} \left(\frac{a}{c}\right)^{4} (C^{2} - 1) - 2xz \left(\frac{a}{c}\right)^{2} \sqrt{A^{2} + B^{2}} = 0 \dots (15)$$

die Gleichung der Kegelflächen.

Bei dem Rotations - Ellipsoide lassen sich auch die Kegelaxen weit einfacher wie in (6) bestimmen. Es schneidet nämlich die Ebene XZ jeden Kegel in zwei Erzeugenden, deren Neigungswinkel durch die verlangte Axe halbirt wird.

Um diese Erzeugenden zu finden, hat man einfach in (15) y=0 zu setzen, wodann

$$x^{2} (C^{2} - A^{2} - B^{2}) + z^{2} \left(\frac{a}{c}\right)^{4} (C^{2} - 1) - 2 x z \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^{2} \cdot \sqrt{A^{2} + B^{2}} = 0$$

oder

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{a}{c}\right)^2 \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{C^2 - A^2 - B^2} = -\left(\frac{a}{c}\right)^4 \cdot \frac{C^2 - 1}{C^2 - A^2 - B^2}$$

und hieraus

$$\frac{x}{z} = \frac{a^2}{c^2} \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \pm C. \sqrt{A^2 + B^2 - C^2 + 1}}{C^2 - A^2 - B^2} = tg (\varphi \pm \omega)e$$

wird, wenn wir den Winkel, welchen die Kegelaxe mit der Z-Axe bildet, mit  $\varphi_e$  und den Neigungswinkel der Erzeugenden gegen die Kegelaxe mit  $\omega_e$  bezeichnen.

Nun ist

$$tg \ 2 \ \varphi_{e} = \frac{tg \ (\varphi + \omega)_{e} + tg \ (\varphi - \omega)_{e}}{1 - tg \ (\varphi + \omega)_{e} \cdot tg \ (\varphi - \omega)_{e}} = \frac{2 \ a^{2} \ c^{2} \ \sqrt{A^{2} + B^{2}}}{c^{4} \ (A^{2} + B^{2} - C^{2}) + a^{4} \ (C^{2} - 1)} \cdot \cdot \cdot (16)$$

Die den einzelnen Intensitätslinien zukommenden Kegelflächen haben somit auch beim Rotations-Ellipsoide verschiedene Axen.

11.

Wird  $\epsilon_1=1$  und  $\epsilon_2=1$ , so sind die beiden Gleichungen (7) und (8) von C unabhängig, woraus folgt, dass für diesen Fall sämmtliche Kegel eine und dieselbe Axe besitzen.

Aus der angenommenen Bedingung resultirt

$$a = b = c$$

daher diesfalls das Ellipsoid in eine Kugel übergeht.

Hiebei gestalten sich die Gleichungen (7) und (8) folgends:

$$M^3 A + M^2 (1 + B^2) - M (A^2 + B^2) A - A^2 = 0$$
  
 $N^3 B + N^2 (1 + A^2) - N (A^2 + B^2) B - B^2 = 0$ 

welchen die Wurzeln

$$M = A, N = B$$

entsprechen. Die constante Kegelaxe ist somit der durch den Kugelmittelpunct gehende Lichtstrahl.

Die Gleichung des Kegels in Bezug auf das neue Coordinatensystem ist:  $x^2 (C^2 - A^2 - B^2) + y^2 C^2 + z^2 (C^2 - 1) - 2 zz \sqrt{A^2 + B^2} = 0 \dots (17)$  Die Winkel, unter welchen die in der Ebene XZ liegenden Kegelerzeugenden gegen die Z-Axe geneigt sind, werden durch die Geichungen

$$tg(\phi \pm \omega)_k = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \pm C. \sqrt{A^2 + B^2 - C^2 + 1}}{C^2 - A^2 - B^2},$$

wobei die Grössen  $q_k$  und  $\omega_k$  eine ähnliche Bedeutung wie  $q_e$  und  $\omega_e$  beim Ellipsoide haben, bestimmt. Hieraus ergibt sich wieder

$$tg \ 2 \varphi_k = \frac{2 \cdot \sqrt{A^2 + B^2}}{A^2 + B^2 - 1}$$

und

$$tg \ q_k = \frac{1 + \sqrt{1 + tg^2 2q_k}}{tg \ 2 \ q_k} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

welcher Werth jenem für die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels des Lichtstrahls gegen die Z-Axe gleichkommt.

Ferner ist

$$tg \ 2 \omega_{k} = \frac{tg \ (\varphi + \omega)_{k} - tg \ (\varphi - \omega)_{k}}{1 + tg \ (\varphi + \omega)_{k} \cdot tg \ (\varphi - \omega)_{k}} =$$

$$= \frac{2 \ C \cdot \sqrt{A^{2} + B^{2} + 1 - C^{2}}}{2 C^{2} - (A^{2} + B^{2} + 1)} = \frac{2 C \cdot \sqrt{\frac{C^{2}}{\sin^{2} \Omega} - C^{2}}}{2 C^{2} - \frac{C^{2}}{\sin^{2} \Omega}} =$$

$$= \frac{2 \sin \Omega \cos \Omega}{2 \sin^{2} \Omega - 1} = -tg \ 2 \Omega;$$

daher

$$2 \omega_k = 180^0 - 2 \Omega$$

oder

$$\omega_k = 90^0 - \Omega$$

der bekannte Satz, dass die durch Puncte der Intensitätslinien einer Kugel gezogenen Radien mit dem Sehstrahl die Complemente jener Neigungswinkel einschliessen, welche die betreffenden Berührungsebenen mit dem Sehstrahl bilden. In diesem Satze ist auch das ganze Verfahren zur Bestimmung der Intensitätslinien einer Kugel enthalten.

Die Gleichung (17) kann auch in der Form

$$C^2 (x^2 + y^2 + z^2) = (x \sqrt{A^2 + B^2} + z)^2$$

geschrieben werden. Weil jedoch, wenn r den Radius der Kugel bezeichnet,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

so gibt dieser Werth in obige Gleichung gesetzt

$$x. \sqrt{A^2 + B^2} + z = \pm Cr$$

als eine andere, einfachere Bedingungsgleichung der Linien gleicher Helle einer Kugel. Aus dieser ist ersichtlich, dass die Intensitätslinien einer Kugel durchgehends ebene Curven, also Kreise sind, deren Ebenen auf der Strahlenrichtung senkrecht stehen.

12.

Die Relation

Mog

$$tg (\varphi + \omega)_e = \frac{a^2}{c^2} tg (\varphi + \omega)_k$$

liefert zugleich ein Constructionsverfahren für die in der zur Strahlenrichtung parallelen Meridianebene liegenden Kegelerzeugenden beim Rotations-Ellipsoid auf Grundlage der in gleicher Ebene liegenden Kegelerzeugenden bei der Kugel.

Fig. 2.

Z E b m a T 09 06 04 02 C

a,

Ist nämlich ZOZ Fig. 2 die Rotationsaxe des Ellipsoids, dessen Meridiancurve die Ellipse BAB sei, also OA  $= 0 C = a, \dot{0} B = c,$ so mache man CD senkrecht auf OB, ziehe aus 0 den Bogen BD bis zum Durchschnitte D mit CD, errichte ferner in D die Gerade DE senkrecht auf OD bis zum Schnite E mit ZZ,  $\left(0E = \frac{c^2}{a}\right)$ , und beschreibe aus 0 mit dem Radius OE den Kreis EF. Weiters ziehe man durch U den Lichtstrahl LS unter dem gegebenen Neigungs-Winkel LOX gegen die Horizontal-Ebene, hier gegen XX, und errichte in F und A die Senkrechten FG und

AH auf XX.

Werden, wie dies immer geschieht, jene Intensitätslinien gesucht, welche den Winkeln sin  $\Omega=1,0.9,0.8,0.7\ldots0.1,0.0$  entsprechen, so hat man dem Obigen (11) gemäss den Radius 6K in 10 gleiche Theile zu theilen, und in den einzelnen Theilpuncten Perpendikel auf LS bis zum Durchschnitte mit dem Kreise EF, welcher den grössten Kreis der Kugel vorstellen soll, zu errichten.

r,

C

B

In Fig. 2 ist  $K\epsilon = \epsilon \delta = 0.10$ K,  $\delta \gamma = \gamma \beta = \beta \alpha = \alpha 0 = 0.20$ K, es entsprechen somit die Sehnen aa', bb', cc', dd', ee' beziehungsweise den Durchmessern der Intensitätslinien 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, während K die Lage des hellsten Punctes und PQ, durch Q senkrecht auf LS, die Selbstschatten-

grenze der Kugel EOF angibt. Hiedurch erscheinen die Intensitätscurven der Kugel vollkommen bestimmt.

Die Verbindungslinien der Puncte  $a, b, \ldots, a', b', \ldots$  mit O stellen die äussersten Erzeugenden jener Kegel  $K_k$ , welche im Durchschnitte mit der Kugel die Intensitätslinien bestimmen vor. Aus diesen lassen sich die in gleicher Ebene liegenden Erzeugenden der die Intensitätslinien des Ellipsoids BABO bestimmenden Kegel  $K_e$  einfach wie folgt, verzeichnen.

Verlängert man nämlich eine solche Erzeugende e' O bis zum Durchschnitte  $\psi$  mit der Geraden FG und führt durch  $\psi$  eine Parallele  $\psi$  g zu O X, so schneidet diese die Gerade A H in einem Puncte g, welcher mit O verbunden, die zu suchende Erzeugende g O des Kegels  $K_e$  und im Durchschnitte von g O mit dem Ellipsenumfang den tiefsten Punct O O der Intensitätslinie O O des Ellipsoids liefert; denn es ist

$$F_{\psi} = FO. \ tg \ \psi \ OF = \frac{c^2}{a} \cdot tg \ \psi \ OF = Ag$$

$$Ag = AO. \ tg \ g \ OA = a. \ tg. \ g \ OA$$

daher

$$tg. \ g \ O \ A = \frac{c^2}{a^2} \ tg. \ \psi \ O \ F$$

oder weil

$$tg \ g \ O A = \cot g \ (\varphi + \omega)_e, \ tg. \ \psi \ O F = \cot g \ (\varphi + \omega)_k$$

$$tg \ (\varphi + \omega)_e = \frac{a^2}{c^2} \ tg \ (\varphi + \omega)_k$$

was zu beweisen war. Dass man sich hiebei ebensogut der in E und B auf ZZ errichteten Perpendikel in gleicher Weise wie der Geraden FG und AH bedienen kann, ist klar.

Schneidet eine Erzeugende z. B. Oe die zugehörige Verticale FG nicht innerhalb der Zeichnungsfläche, so kann man auch Theile der Längen OF und OA z. B.  $Oi = \frac{1}{2}OF$  und  $Oi_1 = \frac{1}{2}OA$  in gleicher Weise wie die ganzen Längen benützen. Die in i auf XX errichtete Senkrechte ix schneidet die Erzeugende Oe in x, so wie die durch x zu x Parallele x das in x errichtete Perpendikel x in x, daher x od die zu suchende Erzeugende des Kegels x0 und x1 der Intensitätslinie x2 des Ellipsoids ist.

Ebenso kann von der Selbstschattengrenze der Kugel auf jene des Ellipsoids übergangen werden.  $\alpha i\lambda$  schneidet PQ in  $\lambda$ ;  $\lambda l \parallel XX$ , bis zum Durchschnitte l mit l mit l mit l mit l verbunden gibt die Selbstschattengrenze l l0 des Ellipsoids.

LS trifft FG in  $\varphi$ ;  $\varphi f \parallel XX$ ; f mit O verbunden, schneidet den Ellipsen-Umfang im hellsten Puncte 1 der Fläche.

Wird der Winkel  $g \circ k$  halbirt, so ist die Halbirungslinie  $o M_{0\cdot 9}$  die Axe des Kegels  $K_{\rm e.}$ 

Ein anderes Verfahren wäre folgendes:

Um z. B. die der Erzeugenden a O des Kegels  $K_k$  entsprechende Erzeugende m O des Kegels  $K_k$  zu finden, ziehe man die Senkrechte  $a a_1$  auf X X,

die Verbindungslinie der Puncte F, C, und zu letzterer parallel die Gerade  $a_1 n_1$ , übertrage ferner  $On_1$  nach On, führe  $nm \perp XX$ ,  $am \parallel XX$ , und verbinde schliesslich den Durchschnittspunct m der letzterhaltenen Geraden mit O. In gleicher Weise wurde die andere Erzeugende rO desselben Kegels, und somit auch der höchste und tiefste Punct O2 der Intensitätslinie O2 gefunden.

Wie bekannt, müssen die Tangenten in den Puncten Q, a, b, . . . . des Kreises beziehungsweise parallel zu den Tangenten in den Puncten 0, 0·2, 0·4 der Ellipse sein, was auch durch die hier benützte Gleichung

$$tg. (\varphi \pm \omega)_e = \frac{a^2}{c^2} tg. (\varphi \pm \omega)_k$$

ausgesprochen wird. Demgemäss sind auch die Tangenten  $T_1T_1$  in den Puncten o parallel zu jenen der Puncte P und Q, also parallel zur Strahlenrichtung LS, und die Tangenten TT der Puncte 1 parallel zu jener des Punctes K, also senkrecht auf LS, wie dies in der Natur der Sache gelegen ist.

## Das Hyperboloid.

13

Die Untersuchung bezüglich der Intensitätslinien eines Hyperboloids mit einem oder mit zwei Mänteln ist der für das Ellipsoid durchgeführten gleich. Auch hier können die Intensitätslinien als Durchschnitte dieser Flächen mit Kegeln, welche ihre Spitze im Mittelpuncte des Hyperboloids haben, angesehen werden. Die für das Ellipsoid aufgestellten Formeln und Gleichungen verwandeln sich in solche für das einmantelige oder zweimantelige Hyperboloid, wenn man in denselben im ersten Falle für c den Werth c  $\sqrt{-1}$ , im zweiten Falle jedoch für a und b die Werthe a  $\sqrt{-1}$ , b  $\sqrt{-1}$  substituirt. Bedeutend vereinfachen sich auch hier die Resultate, wenn sämmtliche drei Hauptaxen des Hyperboloids eine gleiche Länge besitzen.

Bemerkung: Wiewohl es für die Construction der Intensitätslinien eines Ellipsoides kaum von Vortheil sein dürfte, dieselben als Durchschnitte der Fläche mit den angegebenen Kegeln zu bestimmen, weil letztere vorerst auf ziemlich mühsame Weise fixirt werden müssten, so dürften diese Kegel doch in dem Falle eine Beachtung finden, wenn es sich um die Lösung der Aufgabe: "In einem gegebenen Puncte einer Intensitätslinie des Ellipsoides an diese die Tangente zu ziehen", handeln würde. Besagte Tangente ergäbe sich sodann am einfachsten als Durchschnitt der beiden durch den gegebenen Punct an das Ellipsoid und an den betreffenden Kegel gelegten Berührungsebenen. Da hiebei auch die Trace des Kegels auf irgend einer Ebene, am besten auf einer auf der Kegelaxe senkrechten Ebene erforderlich wird, so könnte diese Ebene durch den gegebenen Punct geführt und die Kegel-Trace durch Bestimmung eines Durchmessers, oder von weiteren vier Puncten derselben etc. bestimmt, und aus diesen Bestimmungsstücken verzeichnet werden.

#### Das Paraboloid.

14.

Legt man den Ursprung des elliptischen Paraboloids in den Scheitel desselben, so dass dieser den höchsten Punct der Fläche bildet, so ist

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p_1} = -2z$$

die Gleichung desselben, daher

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{p}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{p}$$

welche Werthe in (1) gesetzt,

$$\frac{C^2 - A^2}{p^2} x^2 + \frac{C^2 - B^2}{p_1^2} y^2 - 2 \frac{AB}{pp_1} xy - 2 \frac{A}{p} x - 2 \frac{B}{p_1} y + (C^2 - 1) = 0 \dots (18)$$

die Gleichung eines Systems von Cylindern geben, welche im Durchschnitte mit dem Paraboloide die gewünschten Intensitätslinien bilden.

Da die Gleichung (18) die Variable z nicht enthält, die Erzeugenden somit parallel zur Z-Axe gehen, so gibt uns besagte Gleichung alsogleich die Projectionen der Linien gleicher Helle auf der Coordinatenebene XY. Die horizontalen Projectionen der Intensitäts-Linien eines Paraboloids mit verticaler Axe sind somit Kegelschnittslinien.

Um die Gattung dieser Linien zu bestimmen, beziehen wir dieselben auf ein neues Coordinatensystem, welches eine solche Lage hat, dass der Ursprung derselbe bleibt, und die beiden X-Axen den Winkel  $\alpha$ , die Y-Axen den Winkel  $\beta$  einschliessen. Zuerst wollen wir jedoch den Mittelpunct der Curven, dessen Coordinaten  $\alpha$  und  $\beta$  sein mögen, suchen, indem wir für  $\alpha$  und  $\beta$  die Werthe  $\alpha$  und  $\beta$  substituiren. Hiedurch verwandelt sich (18) in

$$\frac{C^{2} - A^{2}}{p^{2}} x^{2} + \frac{C^{2} - B^{2}}{p_{1}^{2}} y^{2} - 2 \frac{AB}{p p_{1}} xy +$$

$$+ 2x \left[ \frac{C^{2} - A^{2}}{p^{2}} a - \frac{AB}{p p_{1}} b - \frac{A}{p} \right] +$$

$$+ 2y \left[ \frac{C^{2} - B^{2}}{p_{1}^{2}} b - \frac{AB}{p p_{1}} a - \frac{B}{p_{1}} \right] + \text{etc.} \dots = 0$$

und es muss sonach

a. 
$$\frac{C^2 - A^2}{p^2} - b$$
.  $\frac{AB}{pp_1} - \frac{A}{p} = 0$   
b.  $\frac{C^2 - B^2}{p_1^2} - a$ .  $\frac{AB}{pp_1} - \frac{B}{p_1} = 0$ 

woraus

$$a = \frac{p A}{C^2 - A^2 - B^2}$$

$$b = \frac{p_1 B}{C^2 - A^2 - B^2}$$
(19)

Durch Division beider Grössen erhält man die Gleichung

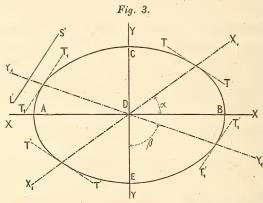
$$\frac{b}{a} = \frac{p_1 B}{p A} \dots \dots (20)$$

für den geometrischen Ort sämmtlicher Cylinder-Axen, welcher daher nichts anderes als eine Diametralebene E des Paraboloids ist, deren Horizontaltrace leicht ermittelt werden kann. Denkt man sich nämlich die Fläche durch eine zu X Y parallele Ebene in der Entfernung z = -m vom Ursprunge, geschnitten, so ist

$$\frac{x^2}{2mp} + \frac{y^2}{2mp_1} = 1$$

die Horizontal-Projection der sich als Schnittcurve ergebenden Ellipse, welcher die Axenlängen  $\pi = \sqrt{2 m p}$ ,  $\pi_1 = \sqrt{2 m p_1}$  zukommen. Weiters ist, wie in (7)  $\frac{B}{A} = tg$  z, wenn z den Winkel, welchen die Horizontalprojection des Lichtstrahls mit der X-Axe bildet, bezeichnet. Ist nun  $\alpha$  der Neigungswinkel der obigen Ebene E mit der Coordinatenebene XZ, so ist

$$\frac{b}{a} = tg \cdot \alpha = \frac{\pi_1^2}{\pi^2} tg x = -\frac{\pi_1^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{tg (90 + x)}$$



Hieraus ist ersichtlich, dass  $\alpha$  die Richtung jenes Diameters der Ellipse gibt, welcher der durch den Winkel 90 + z fixirten Sehnenrichtung conjugirt ist. Man hat somit blos zwei auf die Horizontalprojection L'S', Fig. 3, der Lichtstrahlen senkrechte Tangenten TT, T'T' an die Ellipse zu führen, und die Berührungspuncte zu verbinden, um die Horizontal-

trace X1X1 der in Rede stehenden Axen-Ebene zu erhalten.

15.

Bestimmt man den Durchschnitt der Cylindertracen (18) mit der Horizontaltrace  $X_1\,X_1$  der oben gefundenen Diametralebene

$$y = \frac{p_1 B}{p A} x$$

so findet man

$$x = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \pm C. \sqrt{A^2 + B^2 - C^2 + 1}}{(C^2 - A^2 - B^2). \sqrt{A^2 + B^2}} \cdot Ap$$

$$y = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \pm C. \sqrt{A^2 + B^2 - C^2 + 1}}{(C^2 - A^2 - B^2). \sqrt{A^2 + B^2}} \cdot Bp_1$$
(21)

Durch diese Gleichungen sind die Endpuncte des in der Trace  $X_1X_1$  liegenden Diameters der Horizontalprojection einer jeden Intensitätslinie bestimmt. Um die Richtung des zugehörigen zweiten Diameters zu erhalten, müssen wir die Richtung der Tangenten in den eben gesuchten Puncten angeben. Die Gleichung (18) differentirt, gibt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{C^2 - A^2}{p^2} x - \frac{AB}{pp_1} y - \frac{A}{p}}{\frac{C^2 - B^2}{p_1^2} y - \frac{AB}{pp_1} x - \frac{B}{p_1}}$$

und für x und y die Werthe W. Ap, W.  $Bp_1$  aus (21) gesetzt (wenn wir der Kürze halber den in beiden Ausdrücken vorkommenden Bruch mit W bezeichnen)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{C^2 - A^2}{p^2} \cdot W A p - \frac{AB}{p p_1} \cdot B W p_1 - \frac{A}{p}}{\frac{C^2 - B^2}{p_1^2} \cdot W B p_1 - \frac{AB}{p p_1} \cdot W A p - \frac{B}{p_1}} =$$

$$= -\frac{p_1 A \cdot (C^2 - A^2 - B^2) W - 1}{p B \cdot (C^2 - A^2 - B^2) W - 1} = -\frac{p_1 A}{p B}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass sämmtlichen in der Trace  $y=\frac{p_1B}{pA}\cdot x$  gelegenen Puncten der Intensitätslinien zu einander parallele Tangenten zukommen, deren Neigungswinkel  $\lambda$  gegen die positive Richtung der X-Axe durch den Ausdruck tg  $\lambda=-\frac{p_1A}{pB}$  bestimmt ist. Diese Richtung  $\lambda$  ergibt sich sehr einfach; denn es ist wieder

$$tg\lambda = -\frac{p_1A}{pB} = -\frac{\pi_1^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{tgx} = tg (90 + \beta)$$

also die verlangte Richtung durch den zur Richtung L'S' conjugirten Durchmesser  $Y_1$   $Y_1$  gegeben. Fig. 3.

16.

Die Resultate der eben durchgeführten Entwicklung lassen sich auch mit Vortheil bei der practischen Verzeichnung der Intensitätslinien eines Paraboloids in Anwendung bringen.

Man wird sich hiebei vor allem die Diametralebene E, welche die sämmtlichen Cylinderaxen enthält, so wie die Richtung  $\lambda$  der Tangenten auf die angegebene Weise suchen, und die Parabel, nach welcher das Paraboloid von der Ebene E geschnitten wird, als Leitlinie einer die Fläche in dieser Curve berührenden

Cylinderfläche wählen, ferner auf bekannte Weise die Intensitäts-Erzeugenden dieses Cylinders suchen, und im Durchschnitte derselben mit der Parabel eine Reihe von Puncten erhalten, deren horizontale Projectionen in die Trace  $X_1\,X_1$  der Ebene E fallen und die Endpuncte der in dieser Trace liegenden Durchmesser der Horizontalprojectionen der Intensitätslinien, folglich in den Halbirungspuncten der Abstände zweier zusammengehöriger Endpuncte die Mittelpuncte besagter Curven liefern.

Nachdem  $Y_1 Y_1$ , die Richtung der zu  $X_1 X_1$  conjugirten Axen, bekannt ist, wird man nur noch Puncte der Intensitätslinien, in einer zweiten Diametral-Ebene, am einfachsten in jener, welche die Contour der Fläche in der Vertical-Projection bildet, zu suchen haben, vermittelst welcher nun auch die Längen besagter conjugirter Axen leicht gefunden, und die Horizontalprojection der Intensitätscurven aus beiden Axenlängen verzeichnet werden kann.

Die Verticalprojectionen können nun mit Benützung der Horizontalprojectionen auf verschiedene Art einfach durch eine beliebige Anzahl von Puncten gesucht werden.

17.

Behufs der Bestimmung der Gattung der Cylindertracen ist es am zweckmässigsten, dieselben, wie bereits in 14. angegeben, auf ein schiefwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung ungeändert bleibt, und dessen Axen mit den gleichbezeichneten des früheren Systems die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  bilden, (während die Z-Axe und die Ebene XY dieselbe bleibt) zu beziehen. Wir müssen sonach in (18) für x und y die Werthe  $x \cos \alpha - y \sin \beta$ ,  $y \cos \beta + x \sin \alpha$  substituiren, wodurch wir erhalten:

$$x^{2} \left[ \frac{C^{2} - A^{2}}{p^{2}} \cos^{2}\alpha + \frac{C^{2} - B^{2}}{p_{1}^{2}} \sin^{2}\alpha - 2 \frac{AB}{p p_{1}} \sin \alpha \cos \alpha \right] +$$

$$+ y^{2} \left[ \frac{C^{2} - E^{2}}{p_{1}^{2}} \cos^{2}\beta + \frac{C^{2} - A^{2}}{p^{2}} \sin^{2}\beta + 2 \frac{AB}{p p_{1}} \sin \beta \cos \beta \right] +$$

$$+ 2xy \left[ -\frac{C^{2} - A^{2}}{p^{2}} \sin \beta \cos \alpha + \frac{C^{2} - B^{2}}{p_{1}^{2}} \sin \alpha \cos \beta -$$

$$-\frac{AB}{p p_{1}} \cos \alpha \cos \beta + \frac{AB}{p p_{1}} \sin \alpha \sin \beta \right] -$$

$$- 2x \left[ \frac{A}{p} \cos \alpha + \frac{B}{p_{1}} \sin \alpha \right] + 2y \left[ \frac{A}{B} \sin \beta - \frac{B}{p_{1}} \cos \beta \right] + \left( C^{2} - 1 \right) = 0$$

Wählt man  $\alpha$  und  $\beta$  derart, dass das Product xy so wie die erste Potenz von y entfällt, indem man die Coofficienten dieser beiden Glieder gleich Null setzt, so erhält man

$$tg \ \alpha = \frac{p_1}{p} \cdot \frac{B}{A}$$
$$tg \ \beta = \frac{p}{p_1} \cdot \frac{B}{A}$$

die beiden, bereits in (15) für  $\alpha$  und  $\beta$  (20, 20') gefundenen Werthe, so dass das neue Axensystem die Stellung  $X_1$  O  $Y_1$  hat. (Fig. 3).

In Bezug auf dieses Coordinatensystem haben wir sonach die Gleichung des Cylinders

$$x^{2} - \frac{C^{2} - A^{2} - B^{2}}{p^{2}A^{2} + p_{1}^{2}B^{2}} + y^{2} - \frac{C^{2}}{p^{2}B^{2} + p_{1}^{2}A^{2}} - \frac{2x}{\sqrt{p^{2}A^{2} + p_{1}^{2}B^{2}}} + \frac{C^{2}}{A^{2} + B^{2}} = 0 \dots (22)$$

Aus dieser Gleichung erhellt, dass die horizontalen Projectionen der Intensitätslinien nur insolange Ellipsen werden, als

$$C^2 > A^2 + B^2$$

also

$$\sin^2 \Omega > \frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2 + 1}$$

oder

$$tg \ \Omega > \sqrt{A^2 + B^2} \ \mathrm{d. i.} > tg \ \gamma$$

also

$$\langle \Omega \rangle \langle \gamma \rangle$$

d. h. so lange der Winkel, unter welchen die Lichtstrahlen die Fläche in den Puncten einer Intensitätslinie treffen, grösser ist als der Neigungswinkel des Lichtstrahls gegen die Rotationsaxe. Im entgegengesetzten Falle ist die Cylindertrace eine Hyperbel. Der Uebergang von den Ellipsen zu den Hyperbeln geschieht durch eine Parabel, welche als Horizontalprojection der Intensitätslinie

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2 + 1}} = \sin \gamma$$

erhalten wird. Die Gleichung dieses parabolischen Cylinders ist sodann

$$\frac{A^2 + B^2}{p^2 B^2 + p_1^2 A^2} y^2 - \frac{2x}{\sqrt{p^2 A^2 + p_1^2 B^2}} + \frac{A^2 + B^2 - 1}{A^2 + B^2} = 0$$

und der Abstand des in der Trace  $X_1X_1$  gelegenen Scheitels der Trace vom Ursprunge (y=0)

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2 + B^2 - 1}{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{p^2 A^2 + p_1^2 B^2}$$

18.

Für jene Intensitätslinie, welche durch den Scheitel des Paraboloids geht, muss die Gleichung der Horizontalprojection auch für die Werthe  $x=0,\ y=0$  bestehen, woraus

$$C^2 - 1 = 0$$

also

$$\sin \Omega = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}$$

folgt. Nun gibt aber auch der rechtsstehende Ausdruck den Werth für den sinus des Neigungswinkels  $\nu$  des Lichtstrahls gegen die Coordinatenebene XY an, wesshalb diessfalls  $\Omega = \nu$  sein muss, was schon aus dem Umstande einleuchtet, dass die Tangirungsebene im Scheitel parallel zur Ebene XY ist, daher auch der Neigungswinkel des Lichtstrahls gegen beide Ebenen derselbe bleibt.

19.

Für die Grenzcurve zwischen Licht und Schatten ist nach (2)

$$A - \frac{x}{p} + B - \frac{y}{p_1} + 1 = 0 \dots (23)$$

die Gleichung jener Fläche, deren Durchschnitt mit dem Paraboloide die Selbstschattengrenze erzeugt. Letztere ist auch hier die einzige ebene Intensitäts-Curve: eine Parabel. Wie aus der Gleichung (23) ersichtlich, projectirt sie sich auf der Ebene XY als gerade Linie. Es besteht sonach der Satz, dass ein Cylinder ein Paraboloid nur nach einer Parabel, deren Axe parallel zu jener der Fläche ist, berühren kann.

Diese Trace, auf das Coordinatensystem  $X_1 \ O \ Y_1$  bezogen, hat zur Gleichung (indem man in (22) C = 0 setzt)

$$-\frac{A^2+B^2}{p^2A^2+p_1^2B^2}x^2-\frac{2x}{\sqrt{p^2A^2+p_1^2B^2}}-\frac{1}{A^2+B^2}=0$$

oder

$$\left(x\sqrt{\frac{A^2+B^2}{p^2A^2+p_1^2B^2}}+\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)=0,$$

d. i.

$$x = -\frac{\sqrt{p^2 A^2 + p_1^2 B^2}}{A^2 + B^2}$$

In Bezug auf das schiefwinklige Coordinatensystem hat somit die horizontale Projection der Selbstschattengrenze eine zur Y-Axe parallele Lage.

20.

Für die hellst beleuchteten Puncte der Fläche ist  $\Omega=90^{\circ}$  und wir haben nach (3)

$$A = \frac{x}{p}, B = \frac{y}{p_1}, \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p_1} = -2z,$$

also

$$\begin{cases}
 x = p A \\
 y = p_1 B \\
 z = -\frac{p A^2 + p_1 B^2}{2}
 \end{cases}$$
(24)

Weil nun hieraus

$$\frac{y}{x} = \frac{p_1 B}{p A} = \iota g \alpha$$

ist, so folgt, dass dieser Punct in der neuen Coordinatenebene XZ gelegen ist.

21.

Für das Rotationsparaboloid ist in sämmtlichen Gleichungen  $p=p_1$  zu substituiren. Auch hier übergeht dann das in 17. festgestellte Coordinatensystem in ein rechtwinkliges, dessen Coordinatenebene XZ durch die Axe parallel zu den Lichtstrahlen fällt, weil

$$tg \alpha = tg \beta = \frac{B}{A} = tg x$$

wird. Die Gleichung der horizontalen Projectionen der Intensitätslinien ist sodaun  $x^2$  ( $C^2 - A^2 - B^2$ ) +  $C^2 y^2 - 2 p x \sqrt{A^2 + B^2} + p^2 (C^2 - 1) = 0$ . (25)

22.

Für das hyperbolische Paraboloid gilt ein Aehnliches, was beim Hyperboloid angeführt wurde. Die Entwicklung bleibt jener beim elliptischen Paraboloide vollkommen gleich. Die bezüglichen Relationen können aus den hier entwickelten einfach erhalten werden, wenn man in letzteren einen der beiden Parameter negativ annimmt.

23.

Um ein Beispiel durchzuführen, wollen wir die Intensitätslinien eines Rotationsparaboloides, welches durch Umdrehung der Parabel PQR Fig. 4, um die Axe O''O' entstanden ist, bei jener Strahlenrichtung, wo die Projectionen L'S', L''S'' derselben gegen die Projectionsaxe DD unter dem Winkel von  $45^0$  geneigt sind, bestimmen.

Für diesen Fall haben wir

$$p = p_1, A = -1, B = 1, C^2 = 3\sin^2\Omega$$

daher die Gleichung der Cylinder:

$$(x^2 + y^2 + p^2) (3 \sin^2 \Omega - 1) + 2p (xy + x - y) = 0$$

oder auf das neue Axensystem bezogen:

$$x^{2} (C^{2} - 2) + C^{2} y^{2} - 2 p x \sqrt{2} + p^{2} (C^{2} - 1) = 0$$

oder

$$\left[\frac{x - \frac{p}{C^2 - 2}}{\frac{p \cdot C \cdot \sqrt{3 - C^2}}{C^2 - 2}}\right]^2 + \left[\frac{y}{p \cdot \sqrt{\frac{3 - C^2}{C^2 - 2}}}\right]^2 = 1$$

Die Längen der beiden senkrechten Halbaxen dieser Tracen sind

$$\xi=p$$
  $\frac{C}{C^2}\frac{\sqrt{3-C^2}}{C^2-2}$   $\eta=p$   $\sqrt{rac{3-C^2}{C^2-2}}$  (für Ellipsen),  $=p$   $\sqrt{rac{3-C^2}{2-C^2}}$  (für Hyperbeln),

daher Axenverhältniss, beziehungsweise Neigungswinkel  $\omega$  der Asymptoten gegen die X-Axe

$$tg \omega = \sqrt{\frac{2-C^2}{C^2}},$$

Entfernung des Mittelpunctes vom Ursprunge:

$$m = p \frac{\sqrt{2}}{C^2 - 2}.$$

Die Cylindertrace ist eine Parabel, wenn

$$C^2 - 2 = 0$$
,  $\sin^2 \Omega = \frac{2}{3}$ ,  $\sin \Omega = 0.8165$ ;

alsdann ist deren Gleichung

$$y^2 = p \sqrt{2} \left[ x - p \frac{1}{2\sqrt{2}} \right],$$

daher der Abstand ihres Scheitels vom Ursprunge

$$\mu = p. \frac{1}{2 \sqrt{2}}.$$

Die Abstände der Endpuncte der in XX gelegenen Axe (Hyperbel, Ellipse) vom Ursprunge sind

$$\mu_{1/2} = p. \quad \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{C^2 (3 - C^2)}}{C^2 - 2}.$$

Jene Intensitätslinie, von welcher ein Scheitel in den Ursprung fällt, ist

$$C^2 = 1$$
,  $\sin^2 \Omega = \frac{1}{3}$ ,  $\sin \Omega = 0.5773$ ,

daher, weil hiefür  $C^2 < 2$ , diese eine Hyperbel.

Abstand der Selbstschattengrenztrace vom Ursprunge:  $-p - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

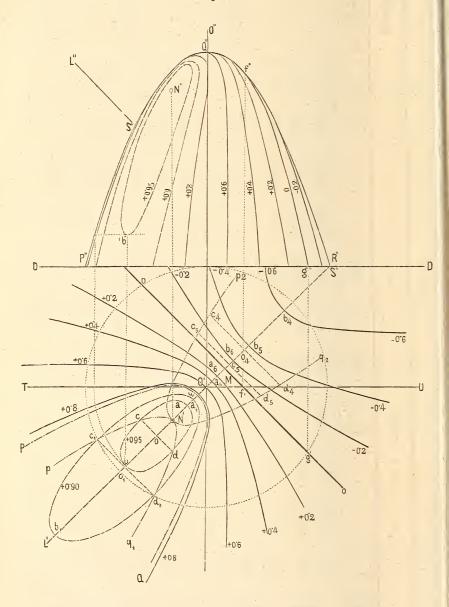
Abstand des hellsten Punctes vom Ursprunge: p.  $\sqrt{2}$ ; (z = -p).

Wir wollen nun die Intensitätslinien 0, 0·2, 0·4, 0·6, 0·8, (0·8165), 1, und weil hiefür durchgehends Hyperbeln erhalten werden, auch die Intensitätslinien 0·9 und 0·95 (zwischen 1 und 0·8165), welche Ellipsen werden, bestimmen.

Wird p als Einheit angenommen, so ergeben sich aus den eben angesetzten Formeln folgende Resultate:

μ,	1-414	3.256	6-025	16.036	8	35.675 +	- 5.498 +	-3.102 +	- 2.828	-1.654 0	- 1.065	- 0.707.0
m m	1.414 1.414	0.740 1.998	0.551 3.288	0.424 8.443	0.353 \ \infty	+ 0.325 - 17.676	+0.162 - 2.668	+0.028 $-1.537$	0 -1.414	0.206 - 0.930	0.4390.752	-0.707 0.707
u	4 0	8 1.258	8 2.737	3 8.018	8	6 18.000	8 2.830	7 1.565	4 1.414	0 0.674	2 0.313	0 4
h	0	0.643	1 151	8.559	8	3.674	1.699	1.445	1.414	1.288	1.238	1.225
4 : \$	0.577	0.511	0.421	0.278	0	0.504	009-0	0.923	-	1.779	3.958	8
3				ı		110 32	310	420 42,	450 P	60° 40'	75° 49′	006
Bemerkung	Abstand von der Drehungs- $Axe \equiv 1$	_	1	I	Abstand des Scheitels von der Drehungsaxe = 1/4	ı	1,	1	Projection der Axenlänge auf der Projectionsaxe == 1	1		Abstand des 'm L'S' gele- genen Punctes von der Drehungsaxe = 1/2

Fig. 4.



Die Axenlängen  $\xi$  wurden von den entsprechenden Mittelpuncten  $o, o_1, \ldots$  welche durch Auftragen der Längen m von O' aus auf L' S' erhalten wurden, zu beiden Seiten der ersteren nach a b,  $a_1$   $b_1$ ,  $a_2$   $b_2$  . . . . . übertragen, und ebenso die auf L' S' senkrechten zweiten Axen c d,  $c_1$   $d_1$ , . . . . so bestimmt, dass c o = d o = 0.634 p,  $c_1$   $o_1$  =  $d_1$   $o_1$  = 1.151 p . . . wird  $(\eta)$ . Ueber den so gefundenen Axenlängen sind nun die Kegelschnittslinien zu verzeichnen. Die Parabel  $P \omega Q$ , für welche  $O' \omega = 0.353 p$  und der Parameter  $2 p' = p V^2$ , also  $p' = \frac{p}{V^2}$  ist, bestimmt die Intensitätslinie 0.8165 und bildet den Uebergang von den Ellipsen zu den Hyperbeln. Die Selbstschattengrenze O O geht durch den Punct M, welcher von O'' O' den Abstand 1/2p besitzt, senkrecht auf L' S'.

In der Zeichnung angegeben finden sich die Intensitätslinien 0·0 (Gerade,) 0·2, 0·4, 0·6, 0·8 (Hyperbeln) 0·8165 (Parabel), 0·9 und 0·95 (Ellipsen) und der hellste Punct N'' N'.

Die Endpuncte der kleinen Axen der Ellipsen bilden ein Parabel  $p_1 N' q_1$ , deren Scheitel N', und deren Axe L'S' ist; denn wir haben für die Coordinaten eines solchen Endpunctes die Werthe

$$m = p \cdot \frac{\sqrt{2}}{C^2 - 2}$$

$$\eta = p \cdot \sqrt{\frac{3 - C^2}{C^2 - 2}}$$

gefunden, aus welchen C eliminirt,

$$\eta = \frac{p}{\sqrt{2}} [m - p\sqrt{2}].$$

Für den geometrischen Ort der Endpuncte der imaginären Axen sämmtlicher Hyperbeln findet man in gleicher Weise

$$\eta^2 = -\frac{p}{\sqrt{2}} \left[ m - p \sqrt{2} \right]$$

als Gleichung einer der Parabel  $p_1$  N'  $q_1$  congruenten Curve  $p_2$  N'  $q_2$  welche denselben Scheitel N' besitzt, und sich in entgegengesetzter Richtung ausbreitet.

Die verticalen Projectionen der Intensitätslinien, von welchen blos die sichtbaren Theile angegeben wurden, ergeben sich nun einfach, indem man dieselben punctweise mit Hilfe einer Anzahl von Parallelkreisen bestimmt. Von Wichtigkeit sind insbesondere jene Puncte (b''), denen horizontale Tangenten zukommen und deren horizontale Projectionen in der Geraden L'S' liegen, also die Scheitel der Kegelschnittslinien bilden, so wie die Puncte (f''), in welchen die Curven aus dem sichtbaren Theile der Fläche in den unsichtbaren übertreten, sonach den verticalen Umriss der Fläche berühren. Die horizontalen Projectionen f' dieser Puncte liegen offenbar in der Trace TO'U.

Die Construction der Tangente in irgend einem Puncte einer Intensitäts-Linie gestaltet sich beim Paraboloide besonders einfach, indem die horizontale Projection der Tangente durch die Axen der Cylindertrace alsogleich mit Genauigkeit verzeichnet werden kann, und sodann blos die verticale Projection dieser Geraden, welche in der bezüglichen Tangirungsebene der Fläche liegt, gesucht zu werden braucht.

Weiters wollen wir noch die Cylinder- und Kegelflächen einer kurzen Betrachtung unterziehen.

## Cylinderflächen.

24.

Legt man das Coordinatensystem derart, dass die Z-Axe parallel zu den Erzeugenden der Fläche lauft, so ist

$$\varphi(x, y) = 0$$

die Gleichung derselben, und

$$\sin \Omega = \frac{A r - B}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1} \cdot \sqrt{r^2 + 1}},$$

wenn  $\frac{dy}{dx} = r$  gesetzt wird; daher ist

$$C.\sqrt{r^2+1}=Ar-B$$

oder

$$r^2 (C^2 - A^2) + 2 ABr + (C^2 - B^2) = 0 \dots (1')$$

die Gleichung eines Systems von Cylindern, deren Erzeugenden gleichfalls parallel zur Z-Axe sind, welche daher im Durchschnitte mit der gegebenen Fläche die geraden Intensitätslinien derselben bestimmen. Durch Auflösung der Gleichungen (1') und q(x, y) = 0, welche beiden blos die Variablen x und y enthalten, werden die Coordinaten der Fusspuncte der die Intensitätslinien bildenden Erzeugenden erhalten.

25.

Für die Selbstschattengrenze ist C = 0, also

$$r^2 A^2 - 2 ABr + B^2 = (rA - B)^2 = 0$$

woraus

$$r = \frac{B}{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2').$$

Hieraus ist ersichtlich, dass man an die Basistrace der Leitlinie blos die zur Horizontalprojection der Lichtstrahlen parallelen Erzeugenden zu führen hat, um in den Berührungspuncten die Fusspuncte der die Selbstschattengrenze bildenden Erzeugenden zu erhalten.

26.

Die hellst beleuchteten Puncte müssen hier so bestimmt werden, dass  $\Omega$  ein Maximum ist. Wir haben sonach

$$\frac{dC}{dr} = \frac{A\sqrt{r^2 + 1} - \frac{r(Ar - B)}{\sqrt{r^2 + 1}}}{r^2 + 1} = 0$$

also

$$A (r^2 + 1) = r (Ar - B)$$

und

$$r = -\frac{A}{B} \dots \dots (3')$$

d. h. die horizontale Trace der Berührungsebene in den hellsten Erzeugenden der Fläche muss auf der horizontalen Projection des Lichtstrahls senkrecht stehen.

Unter obiger Bedingung (3') wird die grösste Intensität der Fläche durch

$$\sin \Omega = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{A^2 + B^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{A^2 + B^2}}} = \sin \gamma$$

ausgedrückt. Es ist sonach der grösste Neigungswinkel, unter welchen die Lichtstrahlen gegen einzelne Puncte der Fläche geneigt sind, jenem Winkel gleich, den dieselben mit der Cylinderaxe bilden.

27.

Aus (1') folgt:

$$r = \frac{dy}{dx} = \frac{-AB + C\sqrt{C^2 - A^2 - B^2}}{C^2 - A^2} = tg\varphi,$$

wenn  $\varphi$  den Winkel der betreffenden Berührungsebene gegen die X-Axe bedeutet. Bezeichnen wir den Neigungswinkel der Horizontaltrace derselben Berührungs-Ebene gegen die Horizontalprojection des Lichtstrahls mit  $\psi$ , und den Winkel, welchen letztere mit der X-Axe bildet mit  $\varepsilon$ , so ist

$$tg\psi = \frac{tg \ \varphi - tg \ \varsigma}{1 + tg \ \varphi \cdot tg \ \varsigma} = \frac{\frac{-AB \pm C\sqrt{C^2 - A^2 - B^2}}{C^2 - A^2} - \frac{B}{A}}{| + \frac{-AB \pm C\sqrt{C^2 - A^2 - B^2}}{C^2 - A^2} \cdot \frac{B}{A}}$$
$$= \pm \frac{C}{\sqrt{C^2 - A^2 - B^2}}$$

oder für  $C^2$  den Werth  $(A^2 + B^2 + 1)$  sin  $^2$   $\Omega$  gesetzt, und den Winkel  $\gamma$  eingeführt:

$$tg \psi = \pm \frac{\sin \Omega}{\sqrt{\sin (\Omega + \gamma). \sin (\Omega - \gamma)}}.....(4')$$

### Kegelflächen.

28.

Wendet man die allgemeinen Formeln auf Kegelflächen an, so findet man, dass die Intensitäts-Erzeugenden gleichfalls als Durchschnitte eines Systems von Kegeln, deren Spitzen mit jener des gegebenen Kegels zusammenfallen, mit letzterem sich ergeben.

Legt man die Z-Axe des Coordinatensystems durch die Kegelaxe und den Ursprung in den Kegelmittelpunct, so ist

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0$$

die Gleichung des Kegels, und man erhält als Bestimmungsgleichung der Intensitätslinien, die Gleichung derselben Kegelflächen, welche die Intensitätslinien des Hyperboloids

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

bestimmen (siehe 13). Man kann somit den Satz aussprechen, dass die Intensitätslinien eines Hyperboloids und jene seines asymptotischen Kegels durch ein und dasselbe System von Kegelflächen erzeugt werden.

## Specielle Lagen der Lichtstrahlen.

29.

Bei speciellen Lagen der Lichtstrahlen erleiden sowohl die allgemeinen Formeln, als auch die für die verschiedenen Flächen aufgestellten Resultate wesentliche Vereinfachungen.

Nimmt man z. B. an, dass die Strahlenrichtung parallel zu einer Haupt-Ebene des Ellipsoids, Hyperboloids oder Paraboloids sei, so wird dies durch Substitution einer der nachfolgenden Bedingungsgleichungen

$$A = 0$$
, oder  $B = 0$ , oder  $A = B = \infty$  und  $\frac{B}{A} = E$ 

erzielt.

Für zur Ebene XZ parallele Lichtstrahlen ist also B=0, mit welchem Werthe aus (8) N=0 folgt, d. h. die Axen der betreffenden Kegel liegen dann sämmtlich in der Ebene XZ, daher die Intensitätslinien von dieser Ebene in zwei symetrische Hälften getheilt erscheinen,

Wird 
$$A=0$$
 und  $B=0$ , so ist 
$$(p^2+q^2+1)\sin^2\Omega=1 \dots (1'')$$

die allgemeine Bedingungsgleichung der Intensitätslinien. Sodann ist auch M==N=0, d. h. die zur Z-Axe parallele Hauptaxe der Fläche ist zugleich die Axe sämmtlicher Kegel, welche durch die Gleichung

$$\left(\frac{x^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{y^2}{\varepsilon_2^2} + z^2\right) \sin^2 \Omega = z^2$$

oder

$$\frac{x^2}{\epsilon_1^2} + \frac{y^2}{\epsilon_2^2} = \frac{z^2 (1 - \sin^2 \Omega)}{\sin^2 \Omega} = \frac{z^2}{t g^2 \Omega}$$

bestimmt werden.

Sucht man die Tracen dieser Kegel auf irgend einer Horizontalebene, z. B. auf jener, welche das Ellipsoid berührt, also im Abstand c vom Ursprung zur Ebene XY parallel lauft, so ist z=c zu setzen und man erhält

$$\left(\frac{x}{\frac{a^2}{c} \cot \Omega}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b^2}{c} \cot \Omega}\right)^2 = 1$$

als Gleichung derselben. Die Axen dieser Tracen sind somit blos den cotangenten der Einfallswinkel proportional.

Das Axenverhältniss dieser Tracen ist dem Quadrate des Axenverhältnisses des in der Ebene XY liegenden Hauptschnittes der Fläche gleich.

Mit diesen Daten lassen sich die Kegel leicht angeben und ihre Durchschnitte mit der Fläche einfach verzeichnen.

30.

Für die letztgenannte Strahlenrichtung haben wir beim elliptischen Paraboloide die Gleichung der horizontalen Projectionen der Intensitätslinien

$$\left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p_1^2} + 1\right) = \csc^2 \Omega$$

oder

$$\left(\frac{x}{p}\right)^2 + \left(\frac{y}{p_1}\right)^2 = \cot^2 \Omega$$

$$\left(\frac{x}{p \cot g \Omega}\right)^2 + \left(\frac{y}{p_1 \cot g \Omega}\right)^2 = 1$$

ein ähnliches Resultat, wie beim Ellipsoide.

# ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen des naturforschenden

Vereines in Brünn

Jahr/Year: 1866

Band/Volume: 05

Autor(en)/Author(s): Koutny Emil

Artikel/Article: Theorie der Beleuchtung krummer Flächen vom

zweiten Grade bei parallelen Lichtstrahlen 49-81