Beiträge

zur

Transformation und numerischen Berechnung

der

elliptischen Integrale der I., II. und III. Art

von

Ignaz Weiner.

I. Theil.

Transformation der elliptischen Integrale.

A. Elliptisches Integral der I. Art.

I.

Um das elliptische Integral der ersten Art

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = F(k, \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

zu transformiren, setzen wir

$$\sin \varphi = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

wobei $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ vorläufig noch unbestimmte Functionen von x bedeuten sollen. Führen wir diese Werthe in die Gleichung (1) ein, so nimmt sie die folgende Form an

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_{x_1}^{x} \frac{[\psi(x)\ \varphi'(x) - \varphi(x)\ \psi'(x)]\ dx}{\sqrt{[\psi(x)]^2 - [\varphi(x)]^2}\ \sqrt{[\psi(x)]^2 - k^2[\varphi(x)]^2}} \quad \ldots (3)$$

Es kömmt nun darauf an, zu untersuchen, ob eine solche Bestimmung von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ möglich wird, dass dadurch entweder beide oder nur einer der Factoren im Nenner des zweiten Theiles der Gleichung (3) rational werden. Eine solche Bestimmung der Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ist in der That möglich.

Denn es wird:

1. für $\varphi(x) = \cos x$ und $\psi(x) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \Delta(\varphi)$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{[\psi(x)]^2 - [\varphi(x)]^2} \cdot \sqrt{[\psi(x)]^2 - k^2[\varphi(x)]^2} = (1 - k^2) \sin x, \\ [\psi(x)\, \varphi'(x) - \varphi(x)\, \psi'(x)]\, dx = -(1 - k^2) \sin x\, dx \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

und die Gleichungen (3) und (2) übergehen in die folgenden:

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = -\int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\cos x = \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\,. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Zur Bestimmung der Integrationsgrenzen x_1 und x, setzen wir $\varphi = 0$, dadurch wir $\cos x = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$; für

$$\varphi = \gamma, \text{ ist } \cos x = \sqrt{1 - k^2}\, \frac{\sin\gamma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\gamma}}\,.$$

Führen wir aber den Werth $\cos x = \cos\frac{\pi}{2}$ in die Gleichung (6) ein, so wird

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin(0) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos(0) + \sin\frac{\pi}{2} \sin(0) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}\,.$$

Die letzte Gleichung kann als ein specieller Werth der allgemeineren

$$\cos x = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

angesehen werden.

Die Gleichung (5) wird daher auch in der folgenden Gestalt

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = -\int_\psi^x \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} = \int_0^\psi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

$$-\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ihre volle Giltigkeit behalten, und daher

$$F(k, \varphi) = F(k, \psi) - F(k, x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

sein, wobei die Amplituden φ, ψ und x durch die Gleichung

$$\cos x = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

verbunden sind.

Schreiben wir nun für $x = \omega$, so folgt

$$F(k, \omega) = F(k, \psi) - F(k, \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

$$\cos\omega = \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

und mit Rücksicht darauf, dass

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi; \quad \int_0^{-\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = -\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

oder $F(k, -\varphi) = -F(k, \varphi)$ ist, verwandeln sich die Gleichungen (11) und (12) in die folgenden

$$F(k, \omega) = F(k, \psi) + F(k, \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

$$\cos\omega = \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

die Gleichungen (13) und (14) enthalten somit das Additions-, die Gleichungen (11) und (12) das Subtractions-Theorem für die elliptischen Integrale der ersten Art.

Die Gleichung (14) kann auch durch die folgenden ersetzt werden.

$$\sin\omega = \frac{\sin\varphi \cos\psi \, \Delta\psi + \sin\psi \cos\varphi \, \Delta\varphi}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

$$\cos\omega = \frac{\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \, \Delta\varphi \, \Delta\psi}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

$$tg\,\omega = \frac{tg\,\psi \, \Delta\varphi + tg\,\varphi \, \Delta\psi}{1 - tg\,\psi \, tg\,\varphi \, \Delta\varphi \, \Delta\psi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

wobei $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$ $\Delta\psi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}$ bedeuten.

II.

Durch wiederholte Anwendung des Additions- und Subtractions-Theorems lassen sich ohne Schwierigkeit die Formeln für die Multiplication und Division der elliptischen Integrale der ersten Art aufstellen.

Für die Multiplication ergeben sich die Formeln:

$$F(k, \omega) = m\, F(k, \varphi)\,; \; tg\,\tfrac{1}{2}(\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) = tg\,\varphi_n \, \Delta\varphi \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

für die Division dagegen

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{m} F(k, \varphi_m)$$

und

$$\cos\varphi_{n+1} + \cos\varphi_{n-1} = \frac{2\cos\varphi\cos\varphi_n}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2\varphi_n} \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

So würde beispielsweise für die Verdoppelung folgen

$$m = 2 = n + 1, \text{ also } n = 1, \; n - 1 = 0$$

und

$$\varphi_n = \varphi, \; \varphi_{n-1} = 0$$

und demnach

$$F(k, \omega) = 2\ F(k, \varphi);\ tg\ \tfrac{1}{2}\ \omega = tg\ \varphi\ \Delta\varphi$$

für die Zweitheilung geben die Formeln (19), wenn darin wieder

$$m = n + 1 = 2;\ n = 1;\quad \varphi_n = \varphi;\ \varphi_{n-1} = 0$$

gesetzt wird

$$F(k, \varphi) = \tfrac{1}{2}\ F(k, \varphi_2);\ \cos\ \varphi_2 = \frac{2\ \cos\ \varphi\ \cos\ \varphi}{1 - k^2\ \sin\ \varphi^2\ \sin^2\ \varphi} - 1$$

$$= \frac{1 - 2\ \sin^2\ \varphi + k^2\ \sin^4\ \varphi}{1 - k^2\ \sin^4\ \varphi}\ .$$

Für die Dreitheilung wird

$$m = n + 1 = 3;\ n = 2;\ \varphi_n = \varphi_2;\ \varphi_{n-1} = \varphi$$

und

$$F(k, \varphi) = \tfrac{1}{3}\ F(k, \varphi_3);\ \cos\ \varphi_3 = \frac{2.\ \cos\ \varphi.\ \cos\ \varphi_2}{1 - k^2\ \sin^2\varphi\ \sin^2\ \varphi_2} - \cos\varphi_2$$

Durch Substitution des Werthes für $\cos\ \varphi_2$ und $\sin\ \varphi_2$ ergibt sich eine Gleichung, welche eine Relation zwischen φ_3 und φ gibt, und aus welcher der Werth von φ berechnet werden kann.

2. Setzen wir nun $\sin\ \varphi = \sqrt{-1}\ \dfrac{\varphi\ (x)}{\psi\ (x)} = i\,tg\ x$, so wird

$$\sqrt{[\psi\ (x)]^2 - [\varphi\ (\varphi)]^2}\ .\ \sqrt{[\psi\ (x)]^2 - k^2\ [\varphi\ (x)]^2} = \sqrt{1 - (1 - k^2)\ \sin^2\ x}$$

$$= \sqrt{1 - b^2\ \sin^2\ x}$$

$$[\psi\ (x)\ \varphi'\ (x) - \varphi\ (x)\ \psi'\ (x)]\ dx = i\ dx$$

und

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\ \varphi}{\sqrt{1 - k^2\ \sin^2\varphi}} = i \int_{x_1}^{x} \frac{d\,x}{\sqrt{1 - (1 - k^2)\ \sin^2 x}}$$

$$= i \int_{x_1}^{x} \frac{d\,x}{\sqrt{1 - b^2\ \sin^2 x}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$x = \text{arc}\ (tg = \tfrac{1}{2}\ \sin\ \varphi) = \frac{1}{2\ i}\ l\ \frac{1 + \sin\ \varphi}{1 - \sin\ \varphi} = \frac{1}{i}\ l\,tg\ \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) .\,.\ (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt unmittelbar, dass ein elliptisches Integral der ersten Art, welches in imaginärer Gestalt erscheint, durch ein elliptisches Integral derselben Art in reeller Form ersetzt werden kann.

B. Elliptisches Integral der zweiten Art.

I.

Auch das elliptische Integral der zweiten Art

$$\int_0^{\varphi} d\varphi\ \sqrt{1 - k^2\ \sin^2\varphi} = E(k, \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

lässt die bei den elliptischen Integralen der ersten Art in Anwendung gebrachte Substitution

$$\sin\varphi = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$$

zu. Es wird

$$\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = -(1 - k^2)\int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{[1 - k^2 \sin^2 x]^3}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

durch Anwendung der Reductionsformel für

$$\int \frac{d\varphi}{[a + b\cos\varphi]^n}$$

ergibt sich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{[1 - k^2 \sin^3 x]^3}} = -\frac{k^2}{1 - k^2}\,\frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}} + \frac{1}{1 - k^2}\int dx \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$$

Wird nun dieser Werth in die Gleichung (2) eingesetzt, so folgt

$$\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = -\int_{x_1}^{x} dx \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} + k^2 \sin x . \frac{\cos x}{\Delta x} \quad . \; . \quad (3)$$

Um die untere Integrationsgrenze x_1 zu bestimmen, muss in der Gleichung $\sin\varphi = \frac{\cos x}{\Delta x}$ die Amplitude $\varphi = 0$ gesetzt werden, dadurch wird

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos(0) + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin(0)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \quad . \; . \quad (4)$$

und die Gleichung (3) erscheint in der Form

$$\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} + \int_0^x dx \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} + k^2 \sin^2 x \sin\frac{\pi}{2}\sin(0)$$

Auch hier ist es zulässig, die Gleichung (4) als einen speciellen Werth der allgemeineren

$$\cos x = \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}$$

zu betrachten, mithin wird auch die Gleichung

$$\int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \int_0^\psi dx \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} - \int_0^x dx \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} + k^2 \sin\psi \sin\varphi \sin x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

ihre volle Giltigkeit besitzen.

Wird nun für $x = \omega$ gesetzt, so folgt

$$E(k, \omega) = E(k, \psi) - E(k, \varphi) + k^2 \sin\psi \sin\varphi \sin\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\cos\omega = \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

für $\varphi = -\varphi$ liefern die Gleichungen (6) und (7)

$$E(k, \omega) = E(k, \psi) + E(k, \varphi) - k^2 \sin\psi \sin\varphi \sin\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\cos\omega = \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

In den Gleichungen (8) und (9) ist das Additions-, in jenen (6) und (7) das Subtractions-Theorem für die elliptischen Integrale der zweiten Art ausgesprochen.

II.

Zu dem eben entwickelten Resultate gelangen wir auch auf dem folgenden Wege. Es ist

$$\left.\begin{aligned} d\,[E(k, \varphi)] &= b^2 \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + k^2 \cos^2\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \\ d\,[E(k, x)] &= b^2 \frac{dx}{\Delta x} + k^2 \cos^2 x \frac{dx}{\Delta x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Substituiren wir aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \\ \cos\varphi &= \cos\psi \cos x + \sin\psi \sin x \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

die Werthe für $\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$ und $\frac{\cos x}{\Delta x}$ in die Gleichungen (10), so folgt

$$d\,[E(k, \varphi)] = (b^2 + k^2 \cos\varphi \cos\psi \cos x) \frac{d\varphi}{\Delta x} + k^2 \cos\varphi \sin\psi \sin x\, d\varphi$$

$$d\,[E(k, x)] = (b^2 + k^2 \cos\varphi \cos\psi \cos x) \frac{dx}{\Delta x} + k^2 \cos x \sin\psi \sin\varphi\, dx$$

Vermöge jeder der beiden Gleichungen (11) ist aber $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\frac{dx}{\Delta x}$ und somit

$$d\,[E(k, \varphi)] + d[E(k, x)] = k^2 \sin\psi (\cos\varphi \sin x\, d\varphi + \cos x \sin\varphi\, dx)$$

und durch die Integration beider Theile der Gleichung

$$E(k, \varphi) + E(k, x) = k^2 \sin\psi \sin\varphi \sin x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

die Gleichungen (11) können aber auch durch die Gleichung

$$\cos\psi = \cos\varphi \cos x - \sin\varphi \sin x \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

ersetzt werden.

Macht man nämlich die Gleichungen (11) rational und addirt in jeder beiderseits $\sin^2\varphi \sin^2 x$, so folgt aus beiden nach einfacher Reduction

$$\cos\psi = \cos\varphi \cos x \pm \sin\varphi \sin x\, \Delta\psi \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Um zu entscheiden, welches von den beiden Vorzeichen zu nehmen ist, bemerken wir, dass für $k = 0$, die Gleichungen (11) liefern

$$\cos x = \cos(\psi - \varphi) \text{ und } \cos\varphi = \cos(\psi - x)$$

dieselben Resultate liefert die Gleichung (14), wenn das untere Zeichen im zweiten Theile der Gleichung beibehalten wird; denn es ist

$$\cos\psi = \cos(\varphi + x) \text{ und } \cos x = \cos(\psi - \varphi),\ \cos\varphi = \cos(\psi - x)$$

Es wird daher die Gleichung (12) auch unter der Bedingung

$$\cos\psi = \cos\varphi\cos x - \sin\psi\sin x\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}$$

ihre volle Giltigkeit behalten.

Bestimmt man nun die Integrations-Constante so, dass

$$x = 0 \text{ und } \cos\psi = \cos\varphi \text{ oder } \psi = \varphi$$

wird, so folgt

$$E(k,\varphi) + E(k,x) = E(k,\psi) + k^2\sin\psi\sin\varphi\sin x \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Schreibt man nun wieder für $x = \psi$ und $\psi = \omega$, so folgt

$$E(k,\omega) = E(k,\varphi) + E(k,\psi) - k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\omega \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

$$\cos\omega = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

für $\varphi = -\varphi$ wird

$$E(k,\omega) = E(k,\psi) - E(k,\varphi) + k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\omega \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

$$\cos\omega = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1 - k^2\sin^2\omega} \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

III.

Analog den für die Multiplication und Division der elliptischen Integrale der ersten Art gefundenen Formeln, lassen sich solche für die Multiplication und Division der elliptischen Integrale der zweiten Art aufstellen.

Für die Multiplication ergeben sich die Formeln

$$\left.\begin{aligned} E(k,\varphi_m) = m\,E(k,\varphi) - k^2\sin\varphi\Big\{&\sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &+ \sin\varphi_2\sin\varphi_3 + \ldots + \sin\varphi_{m-1}\sin\varphi_m\Big\} \\ tg\,\tfrac{1}{2}(\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) = tg\,\varphi_n\,\Delta\varphi& \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (20)$$

Bestimmt man aus der ersten der Gleichungen (20) $E(k,\varphi)$ und setzt für $\sin\varphi_2$, $\sin\varphi_3$ die aus der Gleichung

$$\cos\varphi_{n+1} + \cos\varphi_{n-1} = \frac{2\cos\varphi\cos\varphi_n}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_n}$$

oder

$$\sin\varphi_{n+1} + \sin\varphi_{n-1} = \frac{2.\sin\varphi_n\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_n}$$

folgenden Werthe ein, so ergibt sich die Formel für die Division der elliptischen Integrale der zweiten Art.

IV.

Wenden wir die Substitution

$$\sin\varphi = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = i\,tg\,(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

beim elliptischen Integral der zweiten Art an, so erhalten wir

$$\int d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} = \int (1 - k^2 \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= i \int (1 - k^2 \sin^2 \varphi) \frac{dx}{\Delta x} = i \int \frac{1 - (1 - k^2) \sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{dx}{\Delta x} \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Durch theilweise Integration des zweiten Theiles der Gleichung und nach partieller Substitution von $\sin \varphi = i\, tg\, x$ ergibt sich

$$E(k, \varphi) = tg\varphi\, \Delta\varphi + F(k, \varphi) - i \int_0^x dx \sqrt{1 - b^2 \sin^2 x}$$

oder

$$i \int_0^x dx \sqrt{1 - b^2 \sin^2 x} = tg\varphi\, \Delta\varphi + F(k, \varphi) - E(k, \varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wobei $x = \text{arc}\,(tg = \frac{1}{2} \sin \varphi) = \frac{1}{2}\, l\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ . . . . (4)

zu setzen ist.

Die Gleichungen (3) und (4) bieten ein Mittel dar, ein in imaginärer Gestalt erscheinendes Integral der zweiten Art durch einen algebraischen Ausdruck und das elliptische Integral der ersten und zweiten Art reeller Form auszudrücken.

C. Elliptisches Integral der dritten Art.

I.

Um das elliptische Integral der dritten Art

$$\Pi(h, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{[1 + h \sin^2 \varphi] \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

in ähnlicher Weise, wie dies bei den Integralen der ersten und zweiten Art geschah, zu transformiren; erscheint es am zweckdienlichsten, die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \cos x &= \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \\ \cos \varphi &= \cos \psi \cos x + \sin \psi \sin x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = - \frac{dx}{\Delta x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

der gedachten Transformation zu Grunde zu legen.

Wir erhalten hiedurch

$$\frac{d\varphi}{[1+h\sin^2\varphi]\,\Delta\varphi}+\frac{dx}{[1+h\sin^2 x]\,\Delta x}=$$

$$\frac{h}{[1+h\sin^2\varphi]\,[1+h\sin^2 x]}\left(\cos^2\varphi\,\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\cos^2 x\,\frac{dx}{\Delta x}\right)\quad\ldots\quad(4)$$

Werden nun die Werthe für $\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}$ und $\frac{\cos x}{\Delta x}$ aus den Gleichungen (2) in die Gleichung (4) eingeführt, so folgt unter gleichzeitiger Berücksichtigung, dass $\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{dx}{\Delta x}=0$ ist:

$$d[\Pi(h,k,\varphi)]+d[\Pi(h,k,x)]=\frac{d\varphi}{[1+h\sin^2\varphi]\,\Delta\varphi}+\frac{dx}{[1+h\sin^2 x]\,\Delta x}$$

$$=h\sin\psi\,\frac{d\,[\sin\varphi\sin x]}{1+h\,(\sin^2\varphi+\sin^2 x)+h^2\sin^2\varphi\sin^2 x}\quad\ldots\ldots\quad(5)$$

Aus den Gleichungen (2) folgt nach einigen einfachen Rechnungsoperationen

$$\sin^2\varphi+\sin^2 x=\sin^2\psi-2\cos\psi\,\Delta\psi+k^2\sin^2\varphi\sin^2 x\,.\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

Wird der Werth für $\sin^2\varphi+\sin^2 x$ aus der Gleichung (6) in (5) eingeführt, so folgt

$$\Pi(h,k,\varphi)+\Pi(h,k,x)=C+h\sin\psi\int\frac{dz}{a+2bz+cz^2}\quad\ldots\quad(7)$$

worin $a=1+h\sin^2\psi$, $b=-h\cos\psi\,\Delta\psi$, $c=h^2+h\,k^2\sin^2\psi$ und $z=\sin\varphi\sin x$ bedeuten. Wird nun $z=y-\frac{b}{c}$ gesetzt, so ergibt sich

$$\Pi(h,k,\varphi)+\Pi(h,k,x)=C+h\sin\psi\,\frac{1}{\sqrt{ac-b^2}}\;\mathrm{arc}\left(tg=\frac{b+cz}{\sqrt{ac-b^2}}\right)$$

$$=C+\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{(1+h)\,(h+k^2)}}\;\mathrm{arc}\left(tg=\frac{b+cz}{\sqrt{ac-b^2}}\right)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(8)$$

Zur Bestimmung der Integrations-Constante setzen wir $\varphi=0$, dadurch wird $\cos x=\cos\psi$, oder $x=\psi$ und

$$C=\Pi(h,k,\psi)-\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{(1+h)\,(h+k^2)}}\;\mathrm{arc}\left(tg=\frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}\right);$$

mithin wird

$$\Pi(h,k,\psi)=\Pi(h,k,\varphi)+\Pi(h,k,x)$$

$$+\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{(1+h)\,(h+k^2)}}\left\{\mathrm{arc}\left(tg=\frac{b}{\sqrt{ac-b^2}}\right)\right.$$

$$\left.-\,\mathrm{arc}\left(tg=\frac{b+cz}{\sqrt{ac-b}}\right)\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(9)$$

Werden nun nach der Formel

$$\mathrm{arc}\left(tg = \frac{a'}{b'}\right) - \mathrm{arc}\left(tg = \frac{c'}{b'}\right) = \mathrm{arc}\left(tg = \frac{b'\,(a'-c')}{b'^2 + a'c'}\right)$$

die beiden Bögen vereinigt, so ergibt sich unter gleichzeitiger Berücksichtigung, dass $-\Delta\psi \sin\varphi \sin x = \cos\psi - \cos\varphi \cos x$, nach einigen Reductionen

$$\Pi(h, k, \psi) = \Pi(h, k, \varphi) + \Pi(h, k, x)$$
$$- \alpha \;\mathrm{arc}\left(tg = \frac{\beta \sin\varphi \sin\psi \sin x}{1 - \gamma \cos\varphi \cos\psi \cos x}\right) \quad . \; . \; . \quad (10)$$

wobei der Kürze wegen

$$\alpha = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{1 + h)\,(h + k^2)}}\;;\; \beta = \frac{\sqrt{h\,(h + k^2)}}{\sqrt{1 + h}}\;;\; \gamma = \frac{h}{1 + h}$$

gesetzt sind.

Schreibt man endlich $\psi = \omega$, $x = \psi$ so folgt

$$\Pi(h, k, \omega) = \Pi(h, k, \varphi) + \Pi(h, k, \varphi)$$
$$- \alpha \left\{\mathrm{arc}\left(tg = \frac{\beta \sin\varphi \sin\psi \sin\omega}{1 + \gamma \cos\varphi \cos\psi \cos\omega}\right)\right\} \quad . \; . \; . \quad (11)$$

$$\cos\omega = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

In den Formeln (11) und (12) ist somit wieder das Additionstheorem für die elliptischen Integrale der dritten Art enthalten.

Lässt man $-\varphi$ an Stelle von φ treten, so wird

$$\Pi(h, k, \omega) = \Pi(h, k, \psi) - \Pi(h, k, \varphi)$$
$$+ \alpha \left\{\mathrm{arc}\left(tg = \frac{\beta \sin\varphi \sin\psi \sin\omega}{1 - \gamma \cos\varphi \cos\psi \cos\omega}\right)\right\} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

$$\cos\omega = \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2\omega} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

worin die Bedingungen für die Subtraction der elliptischen Integrale der dritten Art enthalten sind.

Macht $\varphi = \psi$ und bestimmt $\omega = \varphi_2$ mittelst der Gleichung

$$tg\,\tfrac{1}{2}\,\omega = tg\,\varphi\,\Delta\varphi,$$

so erhält man für die Verdoppelung der elliptischen Integrale der dritten Art

$$\Pi(h, k, \varphi_2) = 2\Pi(h, k, \varphi) - \alpha \;\mathrm{arc}\left(tg = \frac{\beta \sin^2\varphi \sin\varphi_2}{1 - \gamma \cos^2\varphi \cos\varphi_2}\right) \quad . \; . \quad (15)$$

Wird aus der Gleichung (15) $\Pi(h, k, \varphi)$ bestimmt und für φ aus der Gleichung

$$\cos\varphi_2 = \frac{1 - 2\sin^2\varphi + k^2 \sin^4\varphi}{1 - k^2 \sin^4\varphi}$$

der sich ergebende Werth eingesetzt, so ergibt sich die Formel für die Zweitheilung der elliptischen Integrale der dritten Art.

II.

Wird in der Gleichung

$$\Pi(h,\ k,\ \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{[1 + h \sin^2 \varphi] \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

die Substitution $\sin \varphi = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 x}}$ durchgeführt, so folgt nach einigen Reductionen

$$\Pi(h,\ k,\ \varphi) = \frac{k^2}{k^2 + h} F(k,\ \varphi)$$

$$+ \frac{h\ (1 - k^2)}{(1 + h)\ (k^2 + k)} \int_{x_1}^{x} \frac{d x}{\left[1 - \dfrac{k^2 + k}{1 + k} \sin^2 \psi\right] \sqrt{1 - k^2 \sin \psi}}$$

$$= \frac{k^2 + h}{k^2} F(k_1\ \varphi) + \frac{h\ (1 - k^2)}{(1 + h)\ (k^2 + h)} \int_{x_1}^{x} \frac{d x}{[1 - m \sin^2 \psi]\ \Delta \psi} \quad . \quad (16)$$

Mittelst der Gleichung $\sin \varphi = \dfrac{\cos x}{\Delta x}$ lässt sich somit ein elliptisches Integral der dritten Art, durch ein anderes Integral der dritten Art mit neuem Parameter und das elliptische Integral der ersten Art ausdrücken.

III.

Wird die Substitution

$$\sin \varphi = i t g\, \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

beim elliptischen Integral der dritten Art in Anwendung gebracht, so folgt

$$\int_0^{x} \frac{d\varphi}{[1 + h \sin^2 \varphi]\ \Delta \varphi} = i \int_{x_1}^{x} \frac{\cos^2 x\ d x}{[1 - (1 + h) \sin^2 x] \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 x}}$$

$$= \frac{i}{1 + h} \int_{x_1}^{x_1} \frac{[1 + h - (1 + h) \sin^2 x]\ d x}{[1 - (1 + h) \sin^2 x] \sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 x}}$$

$$= \frac{1}{1 + h} F(k,\ \varphi) + \frac{i h}{1 + h} \int_{x_1}^{x} \frac{d w}{[1 - (1 + h) \sin^2 x]\ \Delta x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$x = \operatorname{arc}\left(tg = \frac{1}{i} \sin \varphi\right) = \frac{1}{i}\ l\ t g \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Gibt man den Gleichungen (2) und (3) die folgenden Formen

$$i\,\Pi(h,\ k,\ \omega) = -\frac{1}{h}\,F\,(k,\ \varphi) + \frac{1+h}{h}\,\Pi(h,\ k,\ \varphi)$$

$$\omega = \frac{1}{i}\ l\ t\ g\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right),$$

so folgt daraus, dass ein elliptisches Integral der dritten Art, welches in imaginärer Gestalt erscheint, durch ein in reeller Form erscheinendes Integral der ersten und dritten Art ausgedrückt werden kann.

Weitere Transformation der elliptischen Integrale aller drei Arten.

A. Elliptisches Integral der ersten Art.

Setzen wir in dem Integral

$$F\,(k,\ \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\,\varphi}$$

$$k \sin\varphi = \sin\psi \text{ und } \varphi = \psi_1 \pm \psi,$$

so entsteht

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\,\varphi} = \int \frac{d\,\psi_1}{\cos\,\psi} \pm \int \frac{d\psi}{\cos\psi} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Aus den Gleichungen

$$k \sin\varphi = \sin\psi$$

und

$$\sin\varphi = \sin\psi_1 \cos\psi \pm \cos\psi_1 \sin\psi,$$

folgt

$$tg\,\psi = \frac{k \sin\psi_1}{1 \mp k\cos\psi_1};\quad \sin\psi = \frac{k\sin\psi_1}{\sqrt{1 + k^2 \mp 2\,k\cos\psi_1}},$$

$$\cos\psi = -\frac{1 \mp k\cos\psi}{\sqrt{1 + k^2 \mp 2k\cos\psi_1}}$$

Wird nun ψ durch ψ_1 ausgedrückt und behält man das untere Zeichen bei, so folgt

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int \frac{d\,\psi}{\sqrt{1 + k^2 + 2k\cos\psi_1}}$$

Setzt man ferner $\psi_1 = 2\,\omega$, so ist

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\,\varphi} = \frac{2}{1+k}\int \frac{d\,\omega}{\sqrt{1 - \frac{4\,k}{(1+k)^2}\sin^2\omega}} = \frac{2}{1+k}\int \frac{d\omega}{\Delta\,\omega} \quad . \ . \ . \quad (2)$$

$$\sin\psi = \frac{k\sin 2\,\omega}{\sqrt{1 + k^2 + 2\,k\cos 2\,\omega}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin 2\,\omega}{\sqrt{1 + k^2 + 2k\cos 2\,\omega}},\ tg\,\varphi = \frac{\sin 2\,\omega}{k + \cos 2\,\omega} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

ein Ausdruck, der bekanntlich der Landen'schen Substitution zu Grunde liegt.

Zu demselben Resultate gelangt man aber auch, wenn das obere Zeichen in der Gleichung $\varphi = \psi_1 \pm \psi$ beibehalten wird; denn es ist

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \int \frac{d\psi_1}{\sqrt{1 + k^2 - 2k \cos\psi_1}}$$

Macht man hier $\psi_1 = \pi + 2\omega$, so folgt

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2}{1+k} \int \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \frac{4k}{(1+k)^2} \sin^2\omega}};$$

$$\sin\psi = - \frac{k \sin 2\psi}{\sqrt{1 + k^2 + 2k \cos 2\omega}};$$

aus der letzteren Gleichung ist ersichtlich, dass von den zwei für φ erhaltenen Werthen immer der negative zu nehmen ist.

Nach diesen Bemerkungen kann man setzen

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2}{1+k} \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\omega}} = \frac{2}{1+k} \int_0^\omega \frac{d\omega}{\Delta\omega} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

oder

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1+k} F(k_1, \omega) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wobei der Werth für ω aus der Gleichung

$$tg\,\varphi = \frac{\sin 2\omega}{k + \cos 2\omega}$$

oder

$$\sin(2\omega - \varphi) = k \sin\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

zu berechnen und $k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ zu setzen ist.

Eine Untersuchung der die Werthe von k_1 und ω darstellenden Gleichungen zeigt, dass $\omega < \varphi$ und $k_1 > k$ ist. In den Gleichungen (4) — (6) ist daher die Reduction eines elliptischen Integrals der ersten Art auf ein anderes derselben Art mit grösserem Modulus und kleinerer Amplitude ausgesprochen.

Schreiben wir die Gleichung (5) in umgekehrter Ordnung an,

$$F(k_1\,\omega) = \frac{1 + k_1}{2} F(k, \varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

so ist darin die Reduction eines elliptischen Integrals der ersten Art auf ein anderes derselben Art mit kleinerem Modulus und grösserer Amplitude ausgesprochen; dabei sind φ und k aus ω und k_1 zu berechnen.

B. Elliptisches Integral der zweiten Art.

Die Substitution $k \sin\varphi = \sin\psi$ und $\varphi = \psi_1 \pm \psi$ bei den elliptischen Integralen der zweiten Art angewendet, liefert

$$\int d\varphi\ \Delta\varphi = \int \cos\psi\ d\psi_1 \pm \int \cos\psi\ d\psi = \int \frac{[1 \mp k \cos\psi_1]\ d\psi_1}{\sqrt{1 + k^2 \mp 2k \cos\psi_1}}$$

$$\pm \sin\psi = \pm \sin\psi + \tfrac{1}{2}(1-k^2) \int \frac{d\psi_1}{\sqrt{1 + k^2 \mp 2k \cos\psi_1}}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int d\psi_1 \sqrt{1 + k^2 \mp 2k \cos\psi_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Setzen wir wieder $\psi_1 = 2\omega$ oder $\psi_1 = \pi + 2\omega$, so wird

$$\int_0^\varphi d\varphi\ \Delta\varphi = - k \sin\varphi + (1-k) \int_0^\omega \frac{d\omega}{\Delta\omega} + (1+k) \int_0^\omega d\omega\ \Delta\omega \quad \ldots \quad (2)$$

oder

$$E(k, \varphi) = - k \sin\varphi + (1 - k)\ F(k', \omega) + (1 + k)\ E(k', \omega) \quad \ldots \quad (3)$$

und wegen $F(k', \omega) = \frac{1+k}{2} F(k, \varphi)$ auch:

$$\tfrac{1}{2}(1 - k^2)\ F(k, \varphi) = k \sin\varphi + E(k, \varphi) - (1 + k)\ E(k', \omega) \quad \ldots \quad (4)$$

d. h. jede elliptische Function der ersten Art lässt sich durch einen algebraischen Ausdruck und zwei elliptische Integrale der zweiten Art ausdrücken.

C. Elliptisches Integral der dritten Art.

Auch bei den elliptischen Integralen der dritten Art lässt sich die Substitution $k \sin\varphi = \sin\psi$ und $\varphi = \psi_1 - \psi$ in Anwendung bringen. Wir erhalten

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{[1 + h \sin^2\varphi]\ \Delta\varphi} = \Pi(h, k, \varphi,)$$

$$= \frac{2}{1+k} \int_0^\omega \frac{1 + k^2 + 2k \cos 2\omega}{1 + k^2 + h + 2k \cos 2\omega - h \cos^2 2\omega} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\omega}} \quad (1)$$

$$= \frac{2}{1+k} \int_0^\omega \frac{(1 + k)^2 - 4k \sin^2\omega}{(1 + k)^2 + 4(h - k) \sin^2\omega - 4h \sin^2\omega} \cdot \frac{d\omega}{\Delta\omega} \quad \ldots \quad (2)$$

Wird der rational gebrochene Theil rechter Hand vom Gleichheitszeichen in zwei Ausdrücke von der Form: $\frac{m}{n + o \sin^2\omega}$ zerlegt, so folgt nach einigen Reductionen

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{[1+h\sin^2\varphi]\,\varDelta\varphi} = \frac{2}{1+k}\left\{\int\frac{r_1\,d\omega}{[1+s_1\sin^2\omega]\,\varDelta\omega}\right.$$

$$\left. + \int_0^\omega \frac{\varsigma_1\,d\omega}{[1+\sigma_1\sin^2\omega]\,\varDelta\omega}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

oder

$$\Pi(h,k,\varphi) = \frac{2}{1+k}\left\{r_1\,\Pi(s_1,k_1,\omega) + \varsigma_1\,\Pi(\sigma_1,k_1,\omega)\right\} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

d. h. ein elliptisches Integral der dritten Art lässt sich durch zwei Integrale derselben Art mit ungleichen Parametern grösseren Modulis und kleineren Amplituden ausdrücken.

Für die Constanten r_1, s_1, ς_1 und σ_1 liefert die Rechnung die folgenden Werthe

$$r_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{h+k}{\sqrt{(1+h)(h+k^2)}}\right);\; s_1 = 2\,\frac{h-k+\sqrt{(1+h)(h+k^2)}}{(1+k)^2}$$

$$\varsigma_1 = \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{h+k}{\sqrt{(1+h)(h+k^2)}}\right),\; \sigma_1 = 2\,\frac{h-k-\sqrt{(1+h)(h+k^2)}}{(1+k)^2}$$

Eine Untersuchung dieser Werthe zeigt, dass die eben angeführte Transformation für alle Werthe von h, mit Ausnahme der drei Fälle:

1) $h = -n$ und $k^2 < n < 1$, 2) $h = -k^2$ und 3) $h = -1$

ausführbar ist.

Im ersten Falle werden die Werthe der Constanten imaginär, im zweiten und dritten Falle erhält man beziehungsweise

$$\Pi(h=-k^2) = \frac{0}{0}\int\frac{d\omega}{\left[1-\frac{2k}{1+k}\sin^2\omega\right]\varDelta\omega}$$

$$\Pi(h=-1) = \frac{0}{0}\int\frac{d\omega}{\left[1-\frac{2}{1+k}\sin^2\omega\right]\varDelta\omega}$$

In dem Falle $h = -n$, $k^2 < n < 1$ lässt sich das gegebene Integral von einem anderen, dessen Parameter positiv wird, abhängig machen. Es ist für $\sin\varphi = \frac{\cos x}{\varDelta x}$, wie schon oben entwickelt worden.

$$\Pi(h,k,\varphi) = \frac{k^2}{h+k^2}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

$$+ \frac{h(1-k^2)}{(1+h)(h+k^2)}\int_{\psi_1}^{\psi}\frac{d\psi}{\left[1-h\,\frac{h+k^2}{1+h}\sin^2\psi\right]\varDelta\psi}$$

Ist $h = -n$, $k^2 < n < 1$, so ist $-\frac{h + k^2}{1 + h} = + \frac{n - k^2}{1 - n} = + m$ also der neue Parameter positiv und somit die Möglichkeit herbeigeführt, die Transformation durchführen zu können.

Im zweiten Falle ist

$$\int \frac{d\varphi}{[\Delta\varphi]^3} = - \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1 - k^2)\,\Delta\varphi} + \frac{1}{1 - k^2} E(k, \varphi).$$

Im dritten Falle endlich

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,\Delta\varphi} = tg\,\varphi\,\frac{1}{\Delta\varphi} - k^2 \int \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{[\Delta\varphi]^3}$$

$$= \frac{1}{\Delta\varphi}\, tg\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \int \frac{d\varphi}{[\Delta\varphi]^3}$$

$$= \frac{1}{1-k^2}\, tg\,\varphi\, \Delta\varphi + F(k, \varphi) - \frac{1}{1-k^2} E(k, \varphi).$$

D. Das elliptische Integral

$$\int_0^\varphi (a + b \sin^2\varphi) \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = G(k, \varphi).$$

I.

Wird in diesem Integral gesetzt

$$tg\,\varphi = \frac{\sin 2\omega}{k + \cos 2\omega} \text{ und } k_1{}^2 = \frac{4k}{(1+k)^2}$$

so ergibt sich

$$G[k, \varphi] = \int_0^\varphi [a + b \sin^2\varphi] \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= \frac{2}{1+k} \int_0^\omega \left\{ a + \frac{b}{(1+k)^2} \frac{\sin^2 2\omega}{1 - k_1{}^2 \sin^2\omega} \right\} \frac{d\omega}{\Delta\omega} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

woraus durch theilweise Integration und nach gehöriger Reduction entspringt:

$$G(k, \varphi) = \int_0^\varphi [a + b \sin^2\varphi] \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$= \frac{b}{k} \sin\varphi + \frac{2}{1+k} \int_0^\omega \left\{ a - \frac{b}{k} + \frac{2\,b}{k} \sin^2\omega \right\} \frac{d\omega}{\Delta\omega}$$

$$= \frac{b}{k} \sin \varphi + \frac{2}{1+k} \int_0^{\omega} [a_1 + b_1 \sin^2 \omega] \frac{d\omega}{\Delta \omega} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

oder

$$G(k, \varphi) = \frac{b}{k} \sin \varphi + \frac{2}{1+k} G_1 (k_1, \omega) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

In der Gleichung (3) ist die Reduction der Function $G(k, \varphi)$ auf eine andere derselben Art mit grösserem Modulus und kleinerer Amplitude ausgesprochen.

II.

Sieht man in der Gleichung

$$\int_0^{\varphi} [a + b \sin^2 \varphi] \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = \frac{b}{k} \sin \varphi + \frac{2}{1+k} \int_0^{\omega} \left\{ a_1 + b_1 \sin^2 \omega \right\} \frac{d\omega}{\Delta \omega}$$

die Grössen a_1, b_1 und k_1 als gegeben, a, b und k dagegen als die von a_1, b_1 und k_1 abhängigen an, so wird

$$\int_0^{\omega} (a_1 + b_1 \sin^2 \omega) \frac{d\omega}{\Delta \omega} = \frac{1+k}{2} \frac{b}{k} \sin \varphi + \frac{1+k}{2} \int_0^{\varphi} (a + b \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$$

Drückt man nun a und b durch a_1 und b_1 aus, so wird

$$b = \frac{b_1 \; k}{2}, \quad a = a_1 + \frac{b}{k} = a_1 + \frac{b_1}{2}$$

und

$$G(k, \omega) = \int_0^{\omega} (a_1 + b_1 \sin^2 \omega) \frac{d\omega}{\Delta \omega}$$

$$= \frac{1+k}{2} \left\{ \int_0^{\varphi} (a_1 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_1 \; k}{2} \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} - \frac{b_1}{2} \sin \varphi \right\}$$

Wird endlich $a_1 = a$, $b_1 = b$, $k_1 = k$, $\omega = \varphi$ und $\varphi = \psi$ geschrieben, so folgt

$$G(k, \varphi) = \int_0^{\psi} (a + b \sin^2 \varphi) \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$$

$$= \frac{1 + k_1}{2} \left\{ \int_0^{\psi} (a + \frac{b}{2} - \frac{b}{2} k_1 \sin^2 \varphi) \frac{d\psi}{\Delta \psi} - \frac{b}{2} \sin \psi \right\}$$

oder

$$G(k, \varphi) = \frac{1 + k_1}{2} \left\{ G_1 (k_1, \varphi) - \frac{b}{2} \sin \psi \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

also die Function $G(k_1, \varphi)$ auf eine andere derselben Art mit kleinerem Modulus und grösserer Amplitude gebracht.

II. Theil.

Näherungsmethoden zur Ermittlung der numerischen Werthe der elliptischen Integrale.

1. Methode.

A. Elliptisches Integral der ersten Art.

Setzen wir in dem Integral

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta \varphi} = F(k, \varphi) \text{ für } k \sin \varphi = \sin \psi$$

so ist

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \psi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos [\text{arc} (\sin = k \sin \varphi)]} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Für sehr kleine Werthe von φ oder solche Werthe von k, welche der Einheit nahe liegen, darf man schreiben

$$F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos k \varphi} = \frac{1}{k} \, l \, tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

durch wiederholte Zweitheilung erhalten wir für beliebige Werthe von φ

$$F(k, \varphi) = Lim \, 2^m \, F(k, \varphi_{\frac{1}{m}}) = 2^m \frac{1}{k} \, l \, tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k \, \varphi_{\frac{1}{m}}}{2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn nämlich m so gross genommen wird, dass $\sin \varphi_{\frac{1}{m}}$ mit $\varphi_{\frac{1}{m}}$ oder $k \varphi_{\frac{1}{m}}$ mit $\psi_{\frac{1}{m}}$ vertauscht werden kann.

Zur Berechnung von $\varphi_{\frac{1}{m}}$ hat man aus der Gleichung

$$\cos \varphi = \frac{1 - 2 \sin^2 \varphi_{\frac{1}{2}} + k^2 \sin^4 \varphi_{\frac{1}{2}}}{1 - k^2 \sin^4 \varphi_{\frac{1}{2}}}$$

$$\sin^2 \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{k^2 (1 + \cos \varphi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Um zu entscheiden, welches von den beiden Vorzeichen im Zähler des Bruches zu nehmen ist, bemerken wir, dass für $k = 1$ die Gleichung (4) liefert:

$$\cos \varphi = \frac{1 - \sin^2 \varphi_{\frac{1}{2}}}{1 + \sin^2 \varphi_{\frac{1}{2}}} \text{ oder } \sin^2 \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

wonach sich die Wahl des Vorzeichens leicht ergibt.

Wird in der Gleichung

$$\sin \varphi_{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{k^2 (1 + \cos \varphi)}} \text{ für } k \sin \varphi = \sin \lambda_1$$

gesetzt, so folgt: $\sin \varphi_{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \lambda_1}$; führt man anstatt der Bezeichnung $\varphi_{\frac{1}{2}}$, $\varphi_{\frac{1}{4}}$ etc. jene $\varphi_1, \varphi_2 \ldots .$ so wird:

$$\sin \lambda_1 = k \sin \varphi, \;;\; \sin \varphi_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \lambda_1}$$

$$\sin \lambda_2 = k \sin \varphi_1, \;;\; \sin \varphi_2 = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi_1}{\cos \frac{1}{2} \lambda_2}$$

$$\sin \lambda_m = k \sin \varphi_{m-1} \;;\; \sin \varphi_m = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi_{m-1}}{\cos \frac{1}{2} \lambda_m} \quad \ldots\ldots (5)$$

Die Gleichungen (3) und (5) bieten ein bequemes Mittel dar, um den Werth des elliptischen Integrals der ersten Art mit jeder beliebigen Genauigkeit zu erhalten. Wie immer auch der Werth des Modulus beschaffen sein mag, so genügen 4 Transformationen vollkommen, um den Werth der vollständigen elliptischen Function bis zur 7. Decimalstelle mit Sicherheit zu erhalten.

B. Elliptisches Integral der zweiten Art.

Unter der Voraussetzung, dass $k \sin \varphi = \sin \psi$ und φ sehr klein oder k sehr nahe der Einheit liegt, wird auch

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \cos \psi \, d\varphi = \int_0^\varphi \cos [\text{arc} (\sin = k \sin \varphi)] \, d\varphi$$

$$= \int_0^\varphi \cos (k \varphi) \, d\varphi = \frac{1}{k} \sin \varphi$$

gesetzt werden können.

Nun ist aber für hinlänglich grosse Werthe von m

$$E(k, \varphi) = Lim \, [2^m E(k, \varphi_m) - k^2 \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi - 2 k^2 \sin^2 \varphi_2 \sin \varphi_1 - \ldots$$
$$- 2^{m-1} k^2 \sin^2 \varphi_m \sin \varphi_{m-1}] \quad \ldots . (1)$$

$$= 2^m \frac{1}{k} \sin k\, \varphi_m - k^2 \left\{ \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi + \ldots \right.$$

$$\left. 2^{m-1} \sin^2 \varphi_m \sin \varphi_{m-1} \right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Zur Berechnung von φ_1, φ_2 etc. dienen die Gleichungen

$$\sin \lambda_m = k \sin \varphi_{m-1} \;;\; \sin \varphi_m = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi_{m-1}}{\cos \frac{1}{2} \lambda_m}$$

Auch hier wird für alle Werthe von k und $m = 4$ der Werth der vollständigen Function bis auf die 7. Decimalstelle richtig erhalten.

C. Elliptisches Integral der dritten Art.

Die Substitution $k \sin \varphi = \sin \psi$ liefert bei den elliptischen Integralen der dritten Art

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{[1 + h \sin^2 \varphi]\ \varDelta \varphi} = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\left[1 + \frac{h}{k^2} \sin^2 \psi\right] \cos \psi} \quad \ldots\ldots (1)$$

Für sehr kleine Werthe von φ oder solche von k, welche der Einheit sehr nahe liegen, darf man setzen $k\varphi = \psi$, wodurch die Gleichung (1) die folgende Form annimmt

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{[1 + h \sin^2 \varphi]\ \varDelta \varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\left[1 + \frac{h}{k^2} \sin^2 k\varphi\right] \cos k\, \varphi} \quad \ldots\ldots (2)$$

Durch wiederholte Zweitheilung kann man jedes beliebige elliptische Integral der dritten Art von einem solchen abhängig machen, dessen Amplitude der oben gemachten Bedingung entspricht. Es wird für hinlänglich grosse Werthe von m

$$\Pi(h, k, \varphi) = Lim\ \Pi(h, k, \varphi_m) - \alpha \left\{ \operatorname{arc}\left(tg = \frac{\beta \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi}{1 - \gamma \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi}\right) + \cdot \right.$$

$$\left. + 2^{m-1} \operatorname{arc}\left(tg = \frac{\beta \sin^2 \varphi_m \sin \varphi_{m-1}}{1 - \gamma \cos^2 \varphi_m \cos \varphi_{m-1}}\right) \right\}$$

$$= 2^m \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\left[1 + \frac{h}{k^2} \sin^2 k\varphi\right] \cos k\, \varphi}$$

$$- \alpha \left\{ \operatorname{arc}\left(tg = \frac{\beta \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi}{1 - \gamma \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi}\right) + \ldots \right.$$

$$\left. + 2^{m-1} \operatorname{arc}\left(tg = \frac{\beta \sin^2 \varphi_m \sin \varphi_{m-1}}{1 - \gamma \cos^2 \varphi_m \cos \varphi_{m-1}}\right) \right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

wobei

$$a = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{(1 + h)\,(h + k^2)}}\,;\ \beta = \frac{\sqrt{h\,(h + k^2)}}{\sqrt{1 + h}}\ \ \gamma = \frac{h}{1 + h}$$

gesetzt ist.

Zur Bestimmung der Amplituden $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_m$ hat man wie oben die Gleichungen

$$\sin \lambda_m = k \sin \varphi_{m-1}\,;\ \sin \varphi_m = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi_{m-1}}{\cos \frac{1}{2} \lambda_m} \quad \ldots \ldots (4)$$

Bei einer auf 7 Decimalstellen beschränkten Genauigkeit reichen zur Bestimmung der vollständigen Function 5 Transformationen vollkommen aus.

Die in dem vorhergehenden Abschnitt aufgestellten Formeln zur Berechnung der elliptischen Functionen haben vor den von Legendre auf demselben Princip der Theilung beruhenden und zur Berechnung der Werthe der Functionen der ersten und zweiten Art benutzten Formeln in so ferne einen Vorzug, als sie für alle Werthe der Amplituden und der Moduli ihre Brauchbarkeit behalten.

II. Methode.

A. Elliptisches Integral der ersten Art.

I.

Die Gleichung

$$F(k, \varphi) = \frac{2}{1 + k} F(k_1, \varphi_1)$$

liefert durch wiederholte Anwendung der Substitution

$$\sin (2\varphi_m - \varphi_{m-1}) = k_{m-1} \sin \varphi_{m-1}$$

und

$$k^2_m = \frac{4 k_{m-1}}{(1 + k_{m-1})^2} \text{ oder wenn } k_m = \sin \lambda_m \text{ gesetzt wird}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \sin (2 \varphi_m - \varphi_{m-1}) &= \sin \lambda_{m-1} \sin \varphi_{m-1} \\ tg\, \tfrac{1}{2}\, \lambda_m &= \sqrt{\sin \lambda_{m-1}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (1)$$

Die Gleichung

$$F(k, \varphi) = \sqrt{\frac{\sin \lambda_1 \sin \lambda_2 \ldots \sin \lambda_m}{\sin \lambda}} \,.\, F(k_n, \varphi_n,) = A \,.\, F(k_n, \varphi_n)\,;$$

für hinlänglich grosse Werthe von m wird

$$F(k_n, \varphi_n) = Lim \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = l\, tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2}\right)$$

und

$$F(k, \varphi) = A \,.\, l\, tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2}\right) \quad \ldots \ldots (2)$$

Mittelst der Gleichungen (1) und (2) kann der Werth der Function mit jeder gewünschten Genauigkeit für jeden Werth des Modulus und der Amplitude berechnet werden.

II.

Die Gleichung $F(k, \varphi) = \frac{1+k}{2} F(k_1, \varphi_1)$ liefert durch wiederholte Anwendung der Substitution

$$tg\ \varphi_1 = \frac{\sin 2\varphi}{k_1 + \cos 2\varphi}$$

oder der gleichbedeutenden $tg\ (\varphi_1 - \varphi) = \cos\lambda\ tg\ \varphi$ und $\sin\lambda_m = tg^2\ \frac{1}{2}\ \lambda_{m-1}$ die Gleichung

$$F(k, \varphi) = \frac{1}{2^m} \sqrt{\frac{\cos\lambda_1\ \cos\lambda_2 \ldots \cos\lambda_m}{\cos\lambda}}\ F(k_m, \varphi_m) = A \,.\, F(k_m, \varphi_m)$$

Bei unendlich wachsendem m wird $km = 0$

und

$$F(k_m, \varphi_m) = \int_0^{\varphi_m} d\varphi$$

und somit

$$F(k, \varphi) = A\ \varphi_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

die letzte Gleichung mit den beiden dazu gehörigen:

$$\sin\lambda_m = tg^2\ \tfrac{1}{2}\ \lambda_{m-1} \text{ und } tg\ (\varphi_m - \varphi_{m-1}) = \cos\lambda_{m-1}\ tg\ \varphi_{m-1} \quad \ldots \quad (4)$$

kann ebenso wie die Gleichungen (1) und (2) zur Berechnung der Werthe der Function $F(k\varphi)$ für alle Werthe von φ und k benützt werden.

Doch ist es zweckmässig, die Formeln (1) und (2) für $k^2 > \frac{1}{2}$, die Gleichungen (3) und (4) dagegen für $k^2 < \frac{1}{2}$ bei Berechnungen der Werthe von $F(k, \varphi)$ zu benützen.

B. Elliptisches Integral der zweiten Art.

I.

Die zur Werthermittlung der elliptischen Integrale der zweiten Art dienenden Gleichungen lassen sich sowohl aus der Gleichung

$$E(k, \varphi) = \frac{1}{k} \sin\varphi + (1-k)\ F(k_1, \varphi_1) + (1+k)\ E(k_1, \varphi_1)$$

als auch aus den folgenden

$$\left.\begin{aligned} G\ (k, \varphi) &= \frac{b}{k} \sin\varphi + \frac{2}{1+k}\ G_1\ (k_1, \varphi_1) \\ \text{und } G\ (k, \varphi) &= \frac{1+k_1}{2} \left\{ -\frac{b}{2} \sin\varphi_1 + G_1\ (k_1\ \varphi_1) \right\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

entwickeln.

Nach wiederholter Anwendung der Substitution

$$\sin(2\varphi_m - \varphi_{m-1}) = k_{m-1}\sin\varphi_{m-1} \text{ und } k^2_m = \frac{4\, k_{m-1}}{(1+k_{m-1})^2} \quad \ldots \quad (2)$$

liefert die Gleichung

$$G(k, \varphi) = \frac{b}{k}\sin\varphi - \frac{2}{1+k}\, G(k_1, \varphi_1)$$

$$G(k, \varphi) = \frac{b}{k}\sin\varphi + \frac{2}{1+k}\cdot\frac{b_1}{k_1}\sin\varphi_1 + \ldots .$$

$$+ \frac{2}{1+k}\cdot\frac{2}{1+k_1}\cdots\frac{2}{1+k_{n-1}}\int_0^{\varphi_n}(a_n + b_n\sin^2\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

wobei die Grössen a_n und b_n nach dem Gesetze

$$a_m = a_{m-1} + \frac{b_{m-1}}{k_{m-1}} \text{ und } b_m = 2\,\frac{b_{m-1}}{k_{m-1}}$$

gebildet sind.

Für unendlich wachsende n und $a = 1$, $b = -k^2$ entspringt:

$$E(k, \varphi) = \sqrt{\frac{k_1 . k_2 \ldots k_n}{k}}\left\{1 - \frac{2^n\, k}{k_1\, k_2\, k_3 \ldots k_{n-1}}\right.$$

$$+\left[1 + \frac{2}{k_1} + \ldots\ldots \frac{2^{n-1}}{k_1\, k_2 \ldots k_{n-1}}\right]\Bigg\}\, l\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2}\right)$$

$$+ k\left\{\sin\varphi + \frac{2}{\sqrt{k}}\sin\varphi_1 + \ldots + \frac{2^n\sin\varphi_n}{\sqrt{k\, k_1\, k_2 \ldots k_{n-1}}}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Die Formeln (1) und (2) lassen sich zur Berechnung der Function $E(k, \varphi)$ mit Vortheil nur dann anwenden, wenn $k^2 > \frac{1}{2}$ ist.

II.

Ist dagegen $k^2 < \frac{1}{2}$, so ist es zweckmässiger von der Gleichung

$$G(k, \varphi) = \frac{1+k_1}{2}\left\{G_1(k_1, \varphi_1) - \frac{b}{2}\sin\varphi_1\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

auszugehen. Nach n maliger Substitution von

$$tg(\varphi_m - \varphi_{m-1}) = \cos\lambda_m\, tg\,\varphi_{m-1} \text{ und } \sin\lambda_m = tg^2\,\tfrac{1}{2}\,\lambda_{m-1}$$

wird erhalten:

$$G(k, \varphi) = \frac{1}{2^n}(1+k_1)\ldots(1+k_n)\int_0^{\varphi_n}(a_n + b_n\sin^2\varphi_n)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$-\left\{\frac{b}{2}\,\frac{1+k_1}{2}\sin\varphi_1 + \ldots + \frac{b_{n-1}}{2}\cdot\frac{1+k_1}{2}\cdots\frac{1+k_n}{2}\sin\varphi_n\right\}$$

Das Bildungsgesetz für die Grössen a_n und b_n ist das folgende:

$$a_m = a_{m-1} + \tfrac{1}{2}\, b_{m-2} \qquad b_m = \tfrac{1}{2}\, k_m\, b_{m-1}$$

Für unendlich wachsende n und $a = 1$, $b = -k^2$ entspringt

$$E(k, \varphi) = F(k, \varphi) \left\{1 - \frac{k^2}{2}\left(1 + \frac{k_1}{2} + \frac{k_1\, k_2}{4} + \; \ldots\ldots \right)\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, k\, \sqrt{k_1}\, \sin\varphi_1 + \ldots \frac{k}{2^n} \sqrt{k_1\, k_2 \ldots k_n}\, \sin\varphi_n \quad \ldots\ldots (5)$$

Die Formel (5) eignet sich wegen ihrer Einfachheit zu Berechnung von $E(k, \varphi)$ auch in dem Falle, wenn $k^2 > \frac{1}{2}$ ist.

C. Elliptisches Integral der dritten Art.

Aus den Gleichungen

$$\Pi(h, k, \varphi) = \frac{2}{1+k}\left\{ r_1\, \Pi(s_1, k_1, \varphi_1) + \varsigma_1\, \Pi(\sigma_1, k_1, \varphi)\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{h+k}{\sqrt{(1+h)\,(h+k^2)}}\right); \\ s_1 &= 2\, \frac{h - k + \sqrt{(1+h)\,(h+k^2)}}{(1+k)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \varsigma_1 &= \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{h+k}{\sqrt{(1+h)\,(h+k^2)}}\right); \\ \sigma_1 &= 2\, \frac{h - k - \sqrt{(1+h)\,(h+k^2)}}{(1+k)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\Pi(h, k, \varphi) = \frac{h\,(1-h^2)}{(1+h)\,(h+k^2)} \int_{\psi_1}^{\psi} \frac{d\psi}{\left[1 - \frac{h+k}{1+h}\sin^2\psi\right] \Delta\psi}$$

$$+ \frac{k^2}{h+k^2} \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\Delta\psi} \quad \ldots\ldots (4)$$

und

$$\sin\varphi = \frac{\cos\psi}{\Delta\psi} \quad \ldots\ldots (5)$$

folgt, dass die wiederholte Anwendung der Substitution

$$\sin(2\,\varphi_m - \varphi_{m-1}) = k_{m-1}\, \sin\varphi_{m-1}$$

auch beim elliptischen Integral der dritten Art unter allen Umständen möglich ist. Man erhält hiedurch im Allgemeinen

$$\Pi(h, k, \varphi) = \frac{2^n}{(1+k)\,(1+k_1) \ldots (1+k_{n-1})} \left\{\Sigma\; \left[A. \int_{\varphi_n}^{\varphi'_n} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}\; \right|\right.$$

$$+ \Sigma \left[B \int_{\varphi_n}^{\varphi'_n} \frac{d\varphi}{[1 + S_1 \sin^2 \varphi] \cos \varphi} \right] \Big\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

worin die Entwicklung der Grössen A_1, A_2 . . . B_1, B_2 . . . S_1, S_2 . . . sowie der Grenzwerthe φ_m und φ'_m . . . keiner besonderen Schwierigkeit unterliegt.

Ist $k^2 > \frac{1}{2}$ und handelt es sich um eine auf 7 Decimalen beschränkte Genauigkeit, so darf man für alle positiven Werthe von h schreiben:

$$\Pi(h, k \; \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{[1 + h \sin^2 \varphi] \; \Delta \varphi}$$

$$= A \left\{ \int_0^{\varphi_3} \left[\frac{a}{1 + b \sin^2 \varphi} + \frac{c}{1 + d \sin^2 \varphi} + \frac{e}{1 + f \sin^2 \varphi} \right] \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \right. \quad . \; (7)$$

wobei der Kürze wegen

$$A = \frac{2^3}{(1 + k)(1 + k_1)(1 + k_2)}$$

$$a = r_1 \, r_2 \quad ; \quad b = \frac{4 \; s_2}{(1 + k_2)^2}$$

$$c = r_1 \, \varsigma_1 \quad ; \quad d = \frac{4 \; \sigma_2}{[1 + k_2]^2}$$

$$e = \varsigma_1 \quad ; \quad f = \frac{2^4 \, \sigma_1}{[(1 + k_1)(1 + k_2)]^2}$$

gesetzt sind.

Aehnlich gestaltet sich die Gleichung für die beiden Fälle $h = -n$, wenn $n > 1$ oder $n < k^2$ ist. In dem Falle $h = -n$ und $1 > n > k^2$ muss die Gleichung (5) zuerst zur Transformation des gegebenen Integrals benützt werden.

Ist $k^2 < \frac{1}{2}$, so werden die Transformationen viel zu complicirt. In diesem Falle lässt sich jedoch das gegebene Integral durch die Substitution

$$\sin \varphi = i \; tg \; \psi$$

auf die Form

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{[1 + \mathrm{h} \sin^2 \varphi] \; \Delta \varphi} = i \; A \; F(k_1, \psi) + i \; B \; \Pi(h_1, k_1, \psi)$$

$$= \int_0^{\psi} \left[\frac{i}{1+h} + \frac{i \, h}{1+h} \; \frac{1}{1 - (1 + h) \sin^2 \psi} \right] \frac{d\psi}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \psi}}$$

$$= \frac{i}{1+h} \; F(k_1, \psi) + \frac{i \, h}{1+h} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{[1 + h' \sin^2 \psi] \; \Delta \psi} \quad . \; . \; . \quad (8)$$

bringen. Das letztere Integral lässt nun alle oben angeführten Transformationen zu, wenn man berücksichtigt, dass

$$\psi = \operatorname{arc}\left(tg = \frac{1}{2}\sin\varphi\right) = \frac{1}{2}\; l\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \quad . \; . \; . \quad (9)$$

denn für $i\,\psi = \mu$ und $i\,(2\,\psi_1 - \psi) = x$ übergeht die Gleichung

$$\sin\,(2\,\psi_1 - \psi) = b\,\sin\,\psi$$

in

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{x}} = b\,\frac{e^{2\mu} - 1}{e^{\mu}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Macht man nun, um die logarithmische Berechnung von ψ_1 möglich zu machen

$$e^{x} = \operatorname{cotg}\,\alpha \text{ und } e^{\mu} = \operatorname{cotg}\,\beta,$$

so ist

$$\operatorname{cotg}\,2\,\alpha = b\,\operatorname{cotg}\,2\,\beta\,;\; x = \frac{\log\,\operatorname{cotg}\,\alpha}{\log\,e},$$

woraus x, und dadurch auch ψ_1 berechnet werden können.

Auch hier sind die Transformationen an Bedingungen geknüpft. Man findet leicht, dass die Transformation unmöglich wird für

$$h = -k^2;\; h = 1;\; h = -n, \text{ wenn } k^2 > n < 1 \text{ ist.}$$

Die Umwandlung des Integrals in den beiden ersten Fällen ist bereits oben gezeigt worden.

In dem letzteren Falle lässt sich das gegebene Integral von einem anderen mit dem Parameter $n' = \frac{k^2}{n}$ abhängig machen.

Ist nämlich

$$p = \frac{1}{\Delta\varphi}\cdot tg\,\varphi\,;\; \alpha = (1 + h)\left(1 + \frac{k^2}{h}\right)$$

so ist

$$\frac{dp}{1 + \alpha\,p^2} = \left\{\frac{1}{1 + h\,\sin^2\varphi} + \frac{1}{1 + \frac{k^2}{h}\sin^2\varphi} - 1\right\}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} \quad . \; . \quad (11)$$

und wenn die Integration ausgeführt wird

$$\Pi(h, k, \varphi) = -\,\Pi\left(\frac{k^2}{h}, k, \varphi\right) + F(k, \varphi)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arc}\left(tg = \sqrt{\alpha}\,.\,\frac{tg\,\varphi}{\Delta\varphi}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Da nun $h < k^2$ ist, so wird $\frac{k^2}{h} > 1$, und somit die Möglichkeit der weiteren Transformation herbeigeführt.

Hat man durch wiederholte Transformation den Werth des Modulus so weit geändert, dass $h_n = 1$ gesetzt werden kann, so lassen sich durch Substitution

$$i\,\sin\,\varphi_n = tg\,\psi$$

alle erhaltenen Integrale aus der imaginären in die reelle Form überführen, wenn man berücksichtigt, dass

$$\psi = \text{arc}\,(tg = i \sin \varphi_n\,) = \text{arc}\left(tg = \frac{e^{2\varphi_n} - 1}{e^{\varphi_n}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \; (13)$$

Durch die eben angedeutete Transformation wird ein Integral von der Form

$$i\int_0^{i\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + \sigma \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = C \left\{ \int_0^{\psi} d\psi - \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{1 - b \cos^2 \psi} \right\} \quad \ldots \; (14)$$

wobei

$$C = \frac{1}{1 + \sigma} \quad ; \quad b = \frac{1 + \sigma}{\sigma}$$

zu setzen sind.

Es wird daher das primitive Integral

$$\Pi\,(k, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{[1 + h \sin^2 \varphi]\, \Delta\varphi}$$

in dem Falle $k^2 < \frac{1}{2}$ nach der Durchführung aller für diesen Fall angedeuteten Transformationen schliesslich die folgende allgemeine Form erhalten.

$$\Pi(h, k, \varphi) = \frac{2}{1 + b} \cdot \frac{2}{1 + b_1} \;\ldots\; \frac{2}{1 + b_{n-1}} \left\{ \Sigma\,[A \,.\, \varphi_m\,] + \Sigma \left[B \int_{\varphi_m}^{\varphi'_m} \frac{d\varphi}{[1 - \delta \cos^2 \varphi]} \right] \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \; (15)$$

Auch in diesem Falle lassen sich bei einer auf 7 Decimalen beschränkten Genauigkeit ähnliche Vereinfachungen, wie es in dem Falle $k^2 > \frac{1}{2}$ bemerkt worden, durchführen.

III. Theil.

Anwendung der im I. und II. Theile entwickelten Theorien und Formeln auf einige specielle Fälle.

I.

I. Methode.

Es sei $k = \sin \lambda$, $h = tg^2\, \delta$; $\lambda = 45^0$; $\delta = 60^0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Bei Anwendung der ersten Methode hat man

$$\Pi(h, k, \varphi) = 2^n \; \Pi(h, k, \varphi_n) - \alpha \left\{ \text{arc} \left(tg = \frac{\beta \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi}{1 - \gamma \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi} \right) + \ldots \right.$$

$$\left. + \; 2^{n-1} \; \text{arc} \left(tg = \frac{\beta \sin^2 \varphi_n \; \sin \varphi_{n-1}}{1 - \gamma \cos^2 \varphi_x \; \cos \varphi} \right) \right\}$$

$$\alpha = \frac{\sin \delta}{\sqrt{\sin^2 \lambda + tg^2 \delta}} ; \; \beta = \sin \delta \sqrt{\sin^2 \lambda + tg^2 \delta} ; \; \gamma = \sin \delta.$$

$$\sin \lambda_1 = \sin \lambda \sin \varphi ; \; \sin \varphi_1 = \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\cos \frac{1}{2} \lambda_1} \text{ etc.}$$

Nimmt man $n = 5$, so ist:

$\lambda_1 = 45^0$	$\varphi_1 = 49^0 \; 56' \; 22\cdot''77$
$\lambda_2 = 32^0 \; 45' \; 54\cdot''36$	$\varphi_2 = 26^0 \; 6' \; 15\cdot''18$
$\lambda_3 = 18^0 \; 7' \; 38\cdot''56$	$\varphi_3 = 13^0 \; 13' \; 12\cdot''42$
$\lambda_4 = 9^0 \; 18' \; 22\cdot''20$	$\varphi_4 = 6^0 \; 37' \; 55\cdot''224$
$\lambda_5 = 4^0 \; 41' \; 3\cdot''44$	$\varphi_5 = 3^0 \; 19' \; 7\cdot''631$

$$\Pi(h, k, \varphi_n) = \int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\left[1 + \frac{h}{k^2} \sin^2 k\varphi\right] \cos k \varphi}$$

$$= \frac{tg \, \delta}{\sin^2 \lambda + tg^2 \delta} \cdot \text{arc} \left(tg = \frac{tg \, \delta}{\sin \lambda} \sin k \varphi_n \right)$$

$$+ \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin^2 \lambda + tg^2 \delta} \log tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} k \varphi_n \right)$$

$$2^5 . \frac{tg \, \delta}{\sin^2 \lambda + tg^2 \delta} \text{ arc} \left(tg = \frac{tg \, \delta}{\sin \lambda} \sin k \varphi_5 \right) = 1\cdot5830283$$

$$2^5 . \frac{1}{M} \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin^2 \lambda + tg^2 \delta} \cdot \log tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} k \varphi_5 \right) = 0\cdot2648694$$

$$- \alpha \left\{ \text{arc} \left(tg = \frac{\beta \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi}{1 - \gamma \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi} \right) + \ldots\ldots\ldots \right\} = - 0\cdot9718917$$

$$\Pi(k, h, \varphi) = 0\cdot8760075$$

II. Methode.

Es sei wieder $k = \sin \gamma$; $h = tg^2 \delta$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\lambda = 45^0$, $\delta = 60^0$; so liefert die zweite Methode für

$r_1 = 0\cdot9953830$	$\varrho_1 = 0\cdot0046170$
$s_1 = 4\cdot1414600$	$\sigma_1 = - 0\cdot9942740$
$r_2 = 0.9999914$	$\varrho_2 = 0\cdot0000086$
$s_2 = 4\cdot2036078$	$\sigma_2 = - 0.9999892$
$k_1 = 0\cdot9851714$	$k_2 = 0\cdot9999720$

$$k_3 = 1$$

$$\varphi_1 = 67^0\ 30'; \ \varphi_2 = 66^0\ 30'\ 54.''42; \ \varphi_3 = 66^0\ 30'\ 47.''71$$

$$\frac{2^3 . \ r_1 \ r_2}{(1 + k)\ (1 + k_1)\ (1 + k_2)} \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\left[1 + \frac{4\ s_2}{(1 + k_2)^2} \sin^2 \varphi\right] \cos \varphi}$$

$$= A \left\{ \frac{a}{1 + a} \int_0^{\varphi_3} \frac{\cos \varphi \ d\varphi}{[1 + a \sin^2 \varphi]} + \frac{a}{1 + a} \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \right\} = 0{\cdot}8555320$$

$$\frac{2^3 . \ r_1 \ \varsigma_2}{(1 + k)\ (1 + k_1)\ (1 + k_2)} \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\left[1 - \frac{4\ \sigma_2}{(1 + k_2)^2} \sin^2 \varphi\right] \cos \varphi}$$

$$= B \operatorname{Lim} \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = 0{\cdot}0000372$$

$$\frac{2^3 . \ \varsigma_1}{(1 + k)\ (1 + k_1)\ (1 + k_2)} \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\left[1 - \frac{2^4\ \sigma_1}{(1 + k_1)^2\ (1 + k_2)^2} \sin^2 \varphi\right] \cos \varphi}$$

$$= C \left\{ \frac{1}{1 - a_1}\ l\ tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_3}{2}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{a_1}}{1 - a_1}\ l\ \frac{1 + \sqrt{a_1} \sin \varphi_3}{1 - \sqrt{a_1} \sin \varphi_3} \right\} = 0{\cdot}0020382$$

$$\Pi(k, k, \varphi) = 0{\cdot}8555320 + 0{\cdot}0000372 + 0{\cdot}0020382 = 0{\cdot}8760076$$

Wie ersichtlich ist, stimmen die Endresultate bis auf eine Einheit in der 7. Decimalstelle überein.

II.

Es sei wieder:

$$k = \sin \lambda, \ h = - \sin^2 \delta; \ \varphi = 60^0; \ \lambda = 40^0; \ \delta = 20^0.$$

1. Nach der ersten Methode wird, da h negativ und kleiner als k^2 ist

$$\Pi(-h, k, \varphi) = 2^n\ \Pi(-h_1\ k_1\ \varphi^n) + \frac{\alpha}{2\ M} \left\{ \log tg \left(\frac{\pi}{4} + \mu_1\right) \right.$$

$$\left. + \ldots + 2^{n-1} \log tg \left(\frac{\pi}{4} + \mu_n\right) \right\}$$

wenn

$$\alpha = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{(1 - h)\ (k^2 - h)}}; \ \beta = \frac{\sqrt{h\ (k^2 - h)}}{\sqrt{1 - h}}; \ \gamma = \frac{h}{1 + h};$$

$$\frac{\beta \sin^2 \varphi_1 \sin \varphi}{1 + \cos^2 \varphi_1 \cos \varphi} = tg\ \mu_1; \ \frac{\beta \sin^2 \varphi_2 \sin \varphi_1}{1 + \gamma \cos^2 \varphi_2 \cos \varphi_1} = tg\ \mu_2 \text{ etc.}$$

gesetzt wird.

Für $n = 4$ ist:

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 = 33^0\ 49'\ 33\cdot''03 & & \varphi_1 = 31^0\ 30'\ 25\cdot''44 \\ \lambda_2 = 19^0\ 37'\ 43\cdot''28 & & \varphi_2 = 15^0\ 59'\ 37\cdot''42 \\ \lambda_3 = 10^0\ 12'\ \ 5\cdot''02 & & \varphi_3 = \ 8^0\ \ 1'\ 43\cdot''94 \\ \lambda_4 = \ 5^0\ \ 9'\ \ 3\cdot''134 & & \varphi_3 = \ 4^0\ \ 1'\ \ 6\cdot''607 \end{array}$$

$$2^4\, \Pi(-h, k, \varphi_n) = 2^4 \int_0^{\varphi_4} \frac{d\varphi}{\left[1 - \frac{h}{k^2}\sin^2 k\,\varphi\right]\cos k\,\varphi}$$

$$= 2^4 \left\{ \frac{k}{k^2 - h}\, l\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} k\,\varphi_4\right) - \frac{1}{2}\, \frac{\sqrt{h}}{k^2 - h} \cdot l\, \frac{1 + \frac{\sqrt{h}}{k}\sin k\,\varphi_4}{1 - \frac{\sqrt{h}}{k}\sin k\,\varphi_4} \right\}$$

$$= 1{\cdot}5658887 - 0{\cdot}4431159 = 1{\cdot}1227728$$

$$\frac{\alpha}{2M}\left\{\log tg\left(\frac{\pi}{4} + \mu_1\right) + \ldots 2^3 \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \mu_4\right)\right\} = 0{\cdot}0426080$$

somit

$$\Pi(-h, k, \varphi) = 1{\cdot}1653808$$

2. Wird bei der Anwendung der zweiten Methode die Substitution

$$\sin\varphi = i\, tg\, \psi$$

unmittelbar durchgeführt, so wird

$$k_1 = b = \cos\lambda;\ h_1 = h - 1 = -\cos^2\delta;\ k_1{}^2 < h_1.$$

Da somit durch die angedeutete Transformation h_1 negativ, kleiner als Eins und grösser als $k_1{}^2$ ausfällt; wird, den im I. und II. Theile aufgestellten Bedingungen zu Folge, die weitere Transformation des Integrals durch die Substitution

$$\sin(2\,\psi_1 - \psi) = b \sin\psi$$

nicht möglich. Es muss daher das gegebene Integral auf die Form

$$\Pi(-h) = -\Pi\left(-\frac{k^2}{h}\right) + F(k, \varphi) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\, l\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \mu\right),$$

worin

$$\alpha = (1 - h)\left(\frac{k^2}{k} - 1\right) \text{ und } \sqrt{\alpha}\,\frac{tg\,\varphi}{\Delta\,\varphi} = tg\,\mu$$

bedeuten, gebracht werden.

Wird sodann in den Integralen $F(k, \varphi)$ und $\Pi\left(-\frac{k^2}{h}\right)$ die Substitution

$$\sin\varphi = i\, tg\, \psi$$

durchgeführt und die gleichartigen Integrale zusammengefasst, so ergibt sich

$$\Pi(-h) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\, l\, tg\left(\frac{\pi}{4}+\mu\right) + \frac{i\,k^2}{k^2-h}\int_{\psi_0}^{\psi_1}\frac{d\psi}{\sqrt{1-b^2\sin^2\psi}}$$

$$-\frac{i\,k^2}{k^2-h}\int_{\psi_0}^{\psi^0}\frac{d\psi}{\left[1+\frac{k^2-h}{h}\sin^2\psi\right]\sqrt{1-b^2\sin^2\psi}}$$

Zur Bestimmung der Grenzwerthe hat man die Gleichungen

$$\psi = \text{arc}\left(tg = \frac{1}{i}\sin\varphi\right) = \frac{1}{i\,M}\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right);$$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x} = b\,\frac{e^{2\mu}-1}{e^\mu} \text{ etc.}$$

Bei einer auf 7 Decimalen beschränkten Genauigkeit erhält man für

$b = \cos\lambda$;	$\lambda = 40^0$
$b_1 = \sin\lambda_1$;	$\lambda_1 = 82^0\ 23'\ 14.''64$
$b_2 = \sin\lambda_2$;	$\lambda_2 = 89^0\ 44'\ 47.''04$
$b_3 = \sin\lambda_3$;	$\lambda_3 = 90^0$.
$r_1 = 0{\cdot}9968447$;	$\varsigma_1 = 0{\cdot}0031553$
$s_1 = 3{\cdot}2608290$;	$\sigma_1 = -0{\cdot}9958820$
$r_2 = 0{\cdot}9999966$;	$\varsigma_2 = 0{\cdot}0000017$
$s_2 = 3{\cdot}2897745$;	$\sigma_2 = -0{\cdot}9999949$

$$i\,\psi = 1{\cdot}3169579$$
$$i\,\psi_1 = 1{\cdot}2058305$$
$$i\,\psi_2 = 1{\cdot}2021376$$
$$i\,\psi_3 = 1{\cdot}2021335.$$

Ferner, wenn man die pag. (106), Nr. (7) angeführte Formel anwendet, was bei einer auf 7 Decimalen beschränkten Genauigkeit auch hier zulässig ist

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\left[1+\frac{k^2-h}{h}\sin^2\psi\right]\Delta\psi} = A.\left\{a\int_0^{\psi_n}\frac{d\psi}{[1+m\sin^2\psi]\cos\psi}\right.$$

$$\left.+\,b\int_0^{\psi_n}\frac{d\psi}{[1-p\sin^2\psi]\cos\psi} + c\int_0^{\psi_n}\frac{d\psi}{[1-o\sin^2\psi]\cos\psi}\right\}$$

worin

$$A = \frac{2^3}{(1+b)(1+b_1)(1+b_2)}\cdot\frac{k^2}{k^2-h};\ a = r_1\,r_2$$

$$b = r_1\,\varsigma_2;\ c = \varsigma_1;\ m = \frac{4\,s_2}{(1+b_2)^2};\ p = \frac{4\,\sigma_2}{(1+b_2)^2};$$

$$o = \frac{2^4\,\sigma_1}{(1+b_1)^2\,(1+b_2)^2},$$ gesetzt sind.

Wird endlich die Substitution

$$i \sin \psi_n = tg\, \varphi_n$$

angewendet, alle gleichartigen Integrale zusammengefasst und berücksichtigt, dass $p = 1$ gesetzt werden darf, so folgt

$$\Pi(-h, k, \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\, l\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \mu\right) + A.\left\{\left[1 - \frac{a}{1+m} + \frac{c}{o-1}\right]\varphi_n\right.$$

$$- b \sin \varphi_n + \frac{a}{1+m}\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{\left[1 - \frac{1+m}{m}\cos^2\varphi\right]}$$

$$\left.- \frac{c}{o-1}\int_0^{\varphi_n} \frac{d\varphi}{1 - \frac{o-1}{o}\cos^2\varphi}\right\}$$

$$\varphi_n = \text{arc}\left(tg = \frac{e^{2\psi n} - 1}{e^{\psi n}}\right) = \quad 56^0\ 32'\ 36\cdot''44.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\, l\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \mu\right) = \quad 0\cdot2223587 + 0\cdot3343835\,.\, i\,\pi$$

$$A\left(1 - \frac{a}{1+m} + \frac{c}{o-1}\right)\varphi_n = \quad 2\cdot2470362$$

$$- A\,.\,b \sin\varphi_n = - 0\cdot0000023$$

$$A\,\frac{a}{1+m}\int_0^{\varphi_n}\frac{d\,\varphi}{1 - \frac{1+m}{m}\cos^2\varphi} = - 0\cdot2553733 - 0\cdot3343835\,.\, i\,\pi$$

$$- A\,\frac{c}{o-1}\int_0^{\varphi_n}\frac{d\varphi}{1 - \frac{o-1}{o}\cos^2\varphi} = - 1\cdot0486387$$

somit

$$\Pi(-h, k, \varphi) = \quad 1\cdot1653807.$$

Auch hier stimmen die nach den beiden Methoden erhaltenen Endresultate bis auf eine Einheit in der 7. Decimalstelle überein.

Zeitschrift/Journal: Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn

Jahr/Year: 1866

Band/Volume: 05

Autor(en)/Author(s): Weiner Ignaz

Artikel/Article: Beiträge zur Transformation und numerischen Berechnung der elliptischen Integrale der I., II. und III. Art 82-113