Pierre de Fermats großer Satz und seine Lösung.

Von **Karl Czerweny.**

(Mit zwei Abbildungen.)

„Multi pertransibunt et augebitur scientia"
P. de Fermat.

Als Pierre de Fermat [1]), Parlamentsrat zu Toulouse und einer der genialsten Mathematiker des XVII. Jahrhunderts, zu Beginn des Jahres 1657 bald nacheinander seine zwei „Herausforderungen" an die damalige mathematische Welt richtete, dürfte er trotz der von ihm gerne gebrauchten und an der Spitze dieser Arbeit stehenden Worte kaum angenommen haben, daß einer seiner zahlreichen Sätze der Theorie ganzer Zahlen, der in den erwähnten „Herausforderungen" nicht enthalten ist, noch 250 Jahre später ein ungelöstes Rätsel sein werde.

Diese Tatsache betrifft die von Fermat aufgestellte Behauptung, daß $x^n + y^n = z^n$ in ganzen Zahlen nicht lösbar ist, wenn $n > 2$. Er gibt vor, dafür einen „wahrhaft wunderbaren" Beweis zu besitzen, ohne ihn jedoch mitzuteilen. Daß dieser Beweis bis heute nicht gefunden wurde, muß Verwunderung erregen, besonders wenn man bedenkt, welche Bereicherung an Untersuchungsmethoden die ganze Mathematik und mit ihr die von Fermat begründete Zahlentheorie seit ihm erfahren haben. Es braucht bloß an Namen wie Euler, Lagrange, Legendre, Gauß, Dirichlet, Kummer erinnert zu werden.

Im Jahre 1850 machte die Pariser „Akademie des sciences" den Satz zum Gegenstande eines Preisausschreibens, welches, weil ergebnislos, bis 1856 verlängert wurde. Preisgekrönt ward die grundlegende Arbeit Kummers. (Crelles Journal, 40, S. 130 ff.) Doch brachte diese den Beweis nicht im Sinne Fermats allgemein, sondern auf gewisse Primzahlen als Werte für n beschränkt und mit Hilfsmitteln erzielt, die Fermat unbedingt noch nicht zur Verfügung haben konnte.

[1]) Siehe nebenstehendes Porträt, das den „Oeuvres de Fermat" entnommen ist.

Unter diesen Umständen ist es begreiflich, wenn Cantor in seinen berühmten „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" (II. Bd. 1900, S. 773) sich darüber folgendermaßen äußert: „Dieser Satz, welchem seine zufällige Stellung als Randnote den ersten Platz in unserem Berichte anweist, ist zugleich der berühmteste von allen, welche die Wissenschaft Fermat verdankt. Wie es sich mit jenem wirklichen oder vermeintlichen Beweise Fermats verhält, gehört zu den unlösbaren Rätseln". Zeuthen meint in seiner „Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert" (Teubner, Leipzig 1903), daß hier die Möglichkeit einer Selbsttäuschung Fermats nicht glattweg von der Hand zu weisen sei.

Seit dem 27. Juni 1908 ist der Beweis dieses Satzes abermals Gegenstand eines Preisausschreibens auf Grund eines Vermächtnisses des Dr. P. Wolfskehl zu Darmstadt, und zwar seitens der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Ueber die persönlichen Verhältnisse, seine Art zu arbeiten und über die Werke Fermats sagt Zeuthen in dem bereits zitierten Werke folgendes: „Pierre de Fermat (geb. 17. August 1601, gest. 12. Jänner 1665), der Sohn eines Lederhändlers, ist in der Nähe von Montauban (Departement Tarn-et-Garonne) geboren. Er studierte die Rechtswissenschaft zu Toulouse und wurde, nachdem er einige Zeit Anwalt gewesen, Parlamentsrat daselbst. In dieser Stellung verfloß sein Leben ohne große äußere Ereignisse, die wir hier zu erwähnen hätten; in ihr fand er aber für die Untersuchungen Muße, die in fast allen Teilen der Mathematik neue Bahnen eröffneten und ihn zu weitgreifenden Ergebnissen führten. Diese Untersuchungen nahmen öfter von der Mathematik des Altertums, mit der er sehr vertraut war, ihren Ausgangspunkt. Die Algebra gebrauchte er gewöhnlich in der Gestalt und mit den Zeichen, die Viète eingeführt hatte, und legte auf die zu seiner Zeit eingeführten formellen Erleichterungen keinen Wert; sein Scharfblick setzte ihn in den Stand, ihrer entraten zu können. Das Ergebnis seiner Arbeiten ist, was die Zahlentheorie betrifft, durch Briefe, besonders an Frenicle und durch Anmerkungen in seinem Exemplar von Bachets Diophant bekannt worden. Die Resultate seiner anderen mathematischen Untersuchungen schickte er öfter an die Mathematiker in Paris, teils in Briefen, teils in kleineren handschriftlichen Aufsätzen, und auf diese Weise wurden sie nicht nur zu Paris bekannt, sondern auch bei denen im Auslande, die mit den Pariser Mathematikern in Verbindung standen. Durch diese wurde er seinerseits in den Stand gesetzt, das sich in der mathematischen Welt überhaupt Ereignende verfolgen zu können. Nur ganz einzelne seiner Schriften wurden sogleich publiziert und zwar nur auf eifrigen Antrieb anderer hin. Die übrigen Schriften und eine große Menge seiner wissenschaftlichen Briefe erschienen erst in seinen „Varia opera", die sein Sohn 1679 herausgab. Eine Ausgabe von allem, was man von ihm hat aufbringen können, ist unter dem Titel: „Oeuvres de Fermat" erschienen". (Paris 1891.)

Um den unmittelbaren Eindruck, den Fermat bei seinen Zeitgenossen hinterließ, möglichst genau beurteilen zu können, sei es gestattet, hier die wörtliche Uebersetzung [1]) des Nachrufes im „Journal des savants" vom 9. Feber 1665 anzuführen, der nach der Vermutung der Herausgeber der „Oeuvres de Fermat", Paul Tannery und Charles Henry, der Feder Carcavis, eines Kollegen und Freundes Fermats entstammt. Dort heißt es (Tome I, S. 359):

„Man hat hier mit Schmerz die Nachricht vom Ableben Pierre de Fermats, Parlamentsrates zu Toulouse, vernommen. Er war einer der genialsten Geister dieses Jahrhunderts und ein Universal-Genie von so weitem Gesichtskreise, daß, wenn nicht sämtliche Gelehrte seine außerordentlichen Verdienste bezeugten, die Menge dessen kaum glaublich schiene, was man zu seinem Lobe zu sagen hätte.

Er unterhielt ununterbrochen eine lebhafte Korrespondenz mit Descartes, Toricelli, Pascal, Frenicle, Roberval, Huygens etc. und mit den meisten Geometern Englands und Italiens. Mit Carcavi verband ihn eine so innige Freundschaft, daß dieser, während beide zu Toulouse Amtsgenossen waren, der Vertraute seiner Studien war und jetzt noch der Bewahrer aller seiner Schriften ist.

Da diese Blätter hauptsächlich dazu bestimmt sind, die Männer, die sich im Reiche des Wissens hervorgetan, durch ihre Werke sprechen zu lassen, wird man sich hier begnügen, eine Uebersicht der Schriften dieses Großen zu geben, es anderen überlassend, ihm einen eingehenderen und schwungvolleren Nachruf zu widmen.

---

[1]) Originalübersetzung des Verfassers.

Er leistete Glänzendes auf allen Gebieten der Mathematik, aber hauptsächlich in der Wissenschaft der Zahlen und der Geometrie. Wir haben von ihm eine Methode für die Quadratur von Hyperbeln, ferner die der maxima und minima, welche nicht allein zur Lösung ebener und räumlicher Probleme, sondern auch zum Auffinden von Tangenten an krumme Linien, der Schwerpunkte von Körpern und zum Beweise zahlentheoretischer Fragen dient. Wir besitzen von ihm weiter eine Einführung in die Lehre der geometrischen Oerter, die räumliche und ebene Probleme analytisch behandelt und bekannt wurde, noch ehe Descartes über denselben Gegenstand irgendetwas veröffentlicht hatte.

Er schrieb auch eine Abhandlung „De contactibus sphaericis", wo er Sätze für den Raum beweist, die Viète nur für die Ebene bewiesen hatte. In einer anderen Abhandlung stellte er die zwei Bücher des Apollonius Pergaeus über geometrische Oerter wieder her und bewies dieselben. Er gab auch eine allgemeine Methode für die Ausmessung der Kurven etc. Nicht allein, daß er eine äußerst vollkommene Kenntnis der Alten besaß und von allen Seiten bei auftretenden Schwierigkeiten angegangen wurde, klärte er auch eine Unmenge dunkler Stellen auf, die sich in den Schriften der Alten vorfanden. Man hat vor kurzem einige seiner Bemerkungen über Athenée gedruckt; der Uebersetzer des Benedetto Castelli „Ueber das Messen des fließenden Wassers" hat von ihm eine Abhandlung über Synesius veröffentlicht, die so schwierig war, daß Père Petau, der Synesius kommentierte, zugab, sie nur mit größter Mühe verstanden zu haben.

Er hat auch außerdem noch zahlreiche Bemerkungen zu Theon von Smyrna und anderen alten Autoren gemacht; aber die meisten finden sich nur zerstreut in seinen Briefen, da er überhaupt derlei Dinge nur schrieb, um der Neugierde seiner Freunde gerecht zu werden.

Alle diese mathematischen Werke, alle diese merkwürdigen Untersuchungen der Schriften der Alten, hinderten Fermat nicht, sein Amt mit viel Fleiß und so vollkommen zu versehen, daß er für einen der größten Juristen seiner Zeit galt.

Was aber erstaunlich ist, ist die Tatsache, daß er nebst der gewaltigen Geisteskraft, die notwendig war, um dies alles zu leisten, noch jene Zartheit besaß, die ihn befähigte, lateinische, französische und spanische Verse mit derselben Eleganz zu dichten, als würde er zur Zeit Augustus gelebt, beziehungsweise

…mat

Doctrinam tangentium antecedit jamdudum tradita methodus de inventione maximae et minimae cujus beneficio determinantur quaestiones omnes dioristicae et famosa illa problemata quae apud Pappum in praefatione lib. 7i difficilis determinationis habere dicuntur facillime determinantur.

Lineae curvae in quibus tangentes inquirimus, proprietates ~~specificas~~ suas specificas vel per lineas tantum rectas absolvunt vel per curvas rectis aut aliis curvis quomodolibet implicatas.

Priori casui jam satisfactum est praecepto quod quia concisum nimis, difficile visum est, sed tamen tandem legitimum est.

Consideramus nempe in plano cujuslibet curvae rectas duas positione datas, quarum alteram diametrum si libeat, alteram applicatam nuncupabis. Deinde jam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvae non in curva amplius, sed in invenienda tangente per adaequalitatem consideramus et elisis (quae monet doctrina de maxima et minima) homogeneis, fit demum aequalitas quae punctum concursus tangentis cum diametro determinat, ideoque ipsam tangentem.

Exemplis quae olim multiplicia dedimus addatur si placet, tangens cissoidis, cujus Diocli tribuitur inventio.

als würde er einen Großteil seines Lebens an den Höfen von Frankreich oder Spanien zugebracht haben.

Man wird von den Werken dieses großen Mannes eingehender und genauer sprechen können, bis man alle gesammelt haben wird, die bereits gedruckt wurden, beziehungsweise bis man von seinem Sohne die Erlaubnis haben wird, die noch unveröffentlichten zu publizieren."

Die bereits mehrfach zitierten „Oeuvres de Fermat" enthalten 18 selbständige Abhandlungen, ferner 48 Anmerkungen zu Bachets Diophant und an 100 wissenschaftliche Briefe von Fermat. Es mögen die Uebersetzungen von zwei Briefen folgen, die charakteristisch sind.[1])

Der erste vom September 1636 (Oeuvres d. F., Tome III, S. 286) ist an Pater Mersenne, den Vermittler seiner Korrespondenz mit den zeitgenössischen Mathematikern, gerichtet und zeigt, wie es Fermat verstand, durch absichtliche Stellung unmöglicher Aufgaben seine Zeitgenossen, die wegen der Neuheit der Materie diese Unmöglichkeit nicht oder nicht sogleich erkannten, auf harte Proben zu stellen. Dieser Brief und die meisten übrigen zeigen auch, daß sich ihr Autor in einem fortwährenden geistigen Turnier mit seinen Zeitgenossen befand und hauptsächlich deshalb seine Methoden mit peinlichster Sorgfalt verborgen hielt, so daß seine häufigen Bemerkungen, daß er Beweise nicht bringen könne, weil der Rand, wo er sie zu schreiben hätte, zu schmal sei, oder daß er durch Amtsgeschäfte daran verhindert sei, nicht als ganz stichhältig erscheinen, namentlich wenn in Betracht gezogen wird, daß er manchmal Resultate mitteilt (siehe Tome III, S. 243, Anmerkung zu Diophant, III, 22.), die drei Seiten einnehmen. Seine häufigen Anerbieten, die Beweise für aufgestellte Sätze zu liefern, erscheinen eher als vornehm geführte Lanzenstöße, jenen Zeitgenossen zugedacht, die nicht immer besonders höflich mit ihm umgegangen sind.

Der erwähnte Brief lautet:

Hochwürdiger Herr!

„Obwohl ich sehr gerne zugebe, daß ich noch gar nicht dazugekommen bin, die Frage des Herrn St.-Croix zu lösen, werde

[1]) Da die Briefe Fermats noch keinen deutschen Uebersetzer gefunden haben, gestattet sich der Verfasser, seine eigenen Uebersetzungen hier anzuführen. Die beiliegende Tafel zeigt Fermats Schriftzüge; vielleicht trägt sie zur Auffindung irgend eines versprengten Briefes Fermats bei.

ich mir von Ihnen doch die Erlaubnis erbitten, als Gegenleistung für die Zahlen, die er bekanntgegeben hat, an Sie die Lösung Ihrer Probleme richten zu dürfen und ihm in meinem Namen einige Fragen vorzulegen, die er, wie ich glaube, nicht so bald entwirren wird, trotz der hohen Meinung, die Sie von ihm haben und der ganz besonderen Fähigkeiten seines Geistes.

Um besonders schwere Beispiele zu wählen und so, seinem Wunsche gemäß, den Beweis von der Schärfe seines Verstandes rühmlicher zu gestalten, wähle ich folgende Sätze:

1. Ein rechtwinkeliges Dreieck mit ganzzahligen Seiten zu finden, dessen Inhalt wieder eine Quadratzahl ist.

2. Gegeben sei die Summe der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes mit ganzzahligen Seiten und des Produktes aller drei Seiten; es sind die Grenzen zu bestimmen, zwischen denen der Inhalt des Dreieckes liegt. Bitte über die Addition einer eindimensionalen mit einer dreidimensionalen Größe nicht zu erstaunen; denn was die Zahlen anlangt, sind, wie man weiß, alle Mengen homogen.

3. Zwei Biquadrate zu suchen, deren Summe ein Biquadrat ist, oder zwei Kuben, deren Summe ein Kubus ist.

4. Drei Quadratzahlen zu suchen, die eine arithmetische Progression bilden, deren Differenz gleichfalls ein Quadrat ist.

Diesen vier Problemen füge ich noch zwei Theoreme hinzu, die ich entdeckt habe und für die ich von Herrn St.-Croix Beweise erwarte. Sollte ich vergeblich warten, werde ich die Beweise selbst mitteilen. Die zwei Sätze lauten:

I. Jede ganze Zahl ist die Summe von 1, 2 oder 3 Dreieckzahlen, von 1, 2, 3 oder 4 Quadratzahlen, von 1, 2, 3, 4 oder 5 Fünfeckzahlen u. s. w.

Diophant scheint den zweiten Teil dieses Satzes anzunehmen und Bachet hat sich sehr bemüht, um ihn durch Versuche zu beweisen, er hat jedoch den Beweis nicht gegeben. Ich glaube, der erste gewesen zu sein, der diesen ebenso allgemeinen als schönen Satz entdeckt hat, doch führe ich ihn hier noch nicht an, um nicht aufdringlich zu erscheinen.

II. Vermindert man irgendein Vielfaches von 8 um die Einheit, so erhält man eine Zahl, die nur Summe von 4 Quadraten ist, und zwar nicht allein in ganzen, was auch andere schon erkannt haben mochten, sondern auch in gebrochenen Zahlen, was zu beweisen ich mich verpflichte. Dieser Satz zieht bemerkenswerte Folgerungen nach sich, die dem Herrn St. Croix möglicherweise bekannt sind, jedoch den Geist Bachets vergeblich beschäftigt zu haben scheinen."

An seinen Freund und Berufsgenossen sandte Fermat im August 1659 (Oeuvres d. F. Tome II, S. 431) einen Brief, der Andeutungen über seine Beweismethoden auf zahlentheoretischem Gebiete enthält; er lautet:

„Da die gewöhnlichen Methoden, die in den Büchern enthalten sind, nicht genügten, diese schwierigen Sätze zu beweisen, fand ich endlich einen ganz besonderen Weg, um ihnen beizukommen. Ich nannte diese Art zu beweisen „die unendliche, oder unbestimmte Abnahme". Ich bediente mich ihrer anfangs bloß zum Beweise negativer Sätze, z. B. daß es keine um 1 verminderten Zahlen gebe, als nur Vielfache von 3, die aus einem Quadrate und dem Dreifachen eines Quadrates zusammengesetzt sind. Daß es kein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seiten gebe, dessen Inhalt eine Quadratzahl sei.

Der Beweis erfolgt folgendermaßen: Gäbe es irgendein rechtwinkeliges Dreieck mit ganzzahligen Seiten, dessen Inhalt eine Quadratzahl wäre, so gäbe es auch ein anderes, kleineres als jenes, das dieselbe Eigenschaft hätte. Gäbe es ein zweites kleineres als das erste mit derselben Eigenschaft, so würde es auf Grund einer ähnlichen Schlußreihe ein drittes geben, das kleiner als das zweite wäre und dieselbe Eigenschaft hätte, endlich ein viertes, fünftes u. s. w. immer abnehmend.

Nun aber gibt es nicht unendlich viele ganze Zahlen, die kleiner wären als irgendeine gegebene, woraus man schließt, daß es kein rechtwinkeliges Dreieck mit ganzzahligen Seiten gibt, dessen Inhalt ein Quadrat wäre. Man schließt daraus auch, daß es ein solches Dreieck auch in gebrochenen Zahlen nicht geben kann, denn wenn es ein solches gäbe, müßte es auch eines in ganzen Zahlen geben, was jedoch nicht sein kann, wie man durch die „Abnahme" beweisen kann.

Ich füge nicht den Grund dessen bei, aus dem hervorgeht, warum es ein kleineres Dreieck geben müßte, wenn es irgend eines gäbe, weil die Ableitung dessen zu lang wäre und außerdem darin das ganze Mysterium meiner Methode beruht. Es wäre mir sehr angenehm, wenn Pascal, Robervall und die anderen Gelehrten diese Methode nach meinen Andeutungen suchten.

Die längste Zeit war ich nicht imstande, meine Methode auf positive Sätze anzuwenden, da der Pfad dahin viel verschlungener ist als der der Anwendung auf negative. Ich hatte die größten Schwierigkeiten zu überwinden, als ich den Satz, daß jede Primzahl von der Form $4n + 1$ Summe von 2 Quadraten ist, zu beweisen hatte. Aber endlich klärte ich durch mehrmalige Ueberlegung die Sache auf; die positiven Sätze waren meiner Methode unterworfen mit Hilfe einiger neuer Prinzipien, die ich notwendigerweise hinzufügen mußte. Der Fortschritt meines Schließens in dieser Hinsicht ist folgender:

Wenn eine angenommene Primzahl von der Form $4n + 1$ nicht Summe von 2 Quadraten wäre, gäbe es eine Primzahl derselben Form, kleiner als die angenommene, dann eine dritte noch kleinere u. s. w. in „unendlicher Abnahme“, bis man bei der Zahl 5 anlangte, die die kleinste Primzahl von der Form $4n + 1$ ist, und welche nicht Summe von 2 Quadraten sein könnte, was sie jedoch ist. Daraus läßt sich durch den Unmöglichkeitsnachweis der ursprünglichen Annahme beweisen, daß alle Primzahlen von der Form $4n + 1$ die Summe von 2 Quadraten sind.

Es gibt unzählige Fragen dieser Art, es gibt aber auch welche, die eine Anwendung von neuen Prinzipien verlangen, um sich durch die Abnahme beweisen zu lassen; die Suche danach ist bisweilen so schwierig, daß es der größten Mühe bedarf, um dazu zu gelangen. Solcher Art ist folgende Frage, von der Bachet zugibt, daß er sie niemals beweisen konnte, über welche Herr Descartes in einem seiner Briefe dieselbe Erklärung abgibt, dort wo er bekennt, daß er sie für derart schwierig hält, daß er keinen Weg sieht, um sie zu lösen:

Jede ganze Zahl ist ein Quadrat oder Summe von 2, 3 oder 4 Quadraten.

Ich habe diesen Satz endlich meiner Beweismethode unterworfen und ich beweise, daß, wenn eine gegebene Zahl nicht von dieser Natur wäre, es eine kleinere gäbe, die es umsoweniger wäre, endlich eine dritte noch kleinere als die zweite u. s. w. ins Unendliche; woraus man schließt, daß alle Zahlen von dieser Beschaffenheit sind.

Was ich Herrn Frenicle und andern aufgab, ist von ebensolcher, oder noch größerer Schwierigkeit:

Jedes Nichtquadrat ist von solcher Beschaffenheit, daß es unendlich viele Quadrate gibt, die damit multipliziert ein Quadrat vermindert um 1 geben. (Die von Euler später fälschlich als „Pell'sche“ bezeichnete Aufgabe. A. d. V.)

Ich beweise diesen Satz durch die „Abnahme“, die ich in diesem Falle auf besondere Art anwende. Ich gebe zu, daß Herr Frenicle verschiedene besondere Lösungen gegeben hat und Herr Wallis auch, aber der allgemeine Beweis ist nur auf dem Wege der „Abnahme“ zu finden, was ich ihnen hier andeute, damit sie den allgemeinen Beweis des Theorems den speziellen Lösungen, die sie bereits gefunden haben, hinzufügen.

Ich habe endlich gewisse Fragen erwogen, die obwohl negativ, ziemlich große Schwierigkeiten verursachten; die Methode, um darauf die „Abnahme“ anzuwenden, ist ganz verschieden von den vorhergehenden. Zu diesen Fragen gehören:

1. Es gibt keinen Kubus, der in 2 Kuben zerfällbar wäre.

2. Es gibt nur ein einziges ganzzahliges Quadrat, das um 2 vermehrt einen Kubus gibt. ($25 + 2 = 27$.)

3. Es gibt bloß 2 ganzzahlige Quadrate, die um 4 vermehrt, einen Kubus geben. Sie sind 4 und 121.

4. Alle quadratischen Potenzen von 2, vermehrt um die Einheit, sind Primzahlen ($2^{2^k} + 1$). Dieser Satz bedarf wohl eines ganz besonderen Scharfsinnes und ist, obwohl bejahend gefaßt, negativ, weil, wenn man von einer Zahl sagt, daß sie Primzahl ist, es heißt, daß sie durch keine andere geteilt werden kann.

Ich führe hier folgende Frage an, deren Beweis ich an Herrn Frenicle sandte, nachdem er mir eingestand, daß er ihn nicht finden konnte: Es gibt nur 2 Zahlen, 1 und 7, die, um 1 kleiner als das Doppelte eines Quadrates, ein Quadrat derselben Zahl als Summand enthalten.

Nachdem ich alle diese Fragen durchstudierte, die meisten sind von verschiedener Beschaffenheit und auf verschiedene Arten zu beweisen, schritt ich an die Aufstellung von allgemeinen Regeln, um die einfachen und doppelten Gleichungen Diophants zu lösen.

Man sagt z. B. $2\,Q + 7967 = x^2$.

Ich habe eine allgemeine Regel, um diese Gleichung zu lösen, wenn sie möglich ist, und ihre Unmöglichkeit zu beweisen, wenn diese zutrifft.

Man stellt folgende Doppelgleichung auf:

$2 N + 3$ und $2 N + 5 =$ jede einem Quadrate. Bachet rühmt sich in seinen Anmerkungen zu Diophant, eine Regel in 2 besonderen Fällen gefunden zu haben; ich gebe diese allgemein, in allen Arten von Fällen und bestimme durch eine Regel, ob sie möglich ist oder nicht.

Ich habe auch die meisten unvollständigen Sätze Diophants vervollständigt und jene bewiesen, von denen Bachet zugibt, sie nicht beweisen zu können, ferner auch jene, vor welchen Diophant selbst zauderte, wie es scheint. Ich will dafür bei nächster Gelegenheit Beweise und Beispiele erbringen.

Ich gebe zu, daß meine Entdeckung, um zu finden, ob eine Zahl Primzahl sei oder nicht, nicht vollkommen ist, aber ich besitze viele Wege und Methoden, um eine gegebene Zahl in Primfaktoren zu zerlegen und dabei die gewöhnliche Zerlegungsmethode um vieles abzukürzen. Wenn Herr Frenicle sagt, daß er über diesen Gegenstand nachgedacht hat, so hoffe ich, daß eine beträchtliche Hilfe für die Gelehrten die Frucht seiner Arbeit sein wird.

Im Vorliegenden bringe ich eine Uebersicht meiner Gedanken über Zahlen. Ich habe sie nur geschrieben, weil ich fürchte, daß mir die Muße fehlen wird, sie zu erweitern; für alle Fälle werden diese Andeutungen den Gelehrten dienen, um jenes zu finden, was ich keineswegs mehr erweitern werde, besonders wenn die Herren Carcavi und Frenicle ihnen von einigen Beweisen durch die „unendliche Abnahme" Mitteilung machen, die ich ihnen für einzelne negative Sätze übersandte. Kann sein, daß mir die Nachwelt Dank wissen wird dafür, daß ich ihr zeigte, daß die Alten nicht alles gewußt haben. Diese Abhandlung wird wahrscheinlich viele beschäftigen, die nach mir die „traditio lampadis ad filios" versuchen werden, wie der große englische Kanzler sagt, dessen Devise folgend ich hinzufüge: Multi pertransibunt et augebitur scientia."

Dieser Brief, obwohl 6 Jahre vor Fermats Tode geschrieben, ist, man fühlt es deutlich heraus, sein zahlentheoretisches Testament an die Wissenschaft, das er seinem Freunde Carcavi zur Aufbewahrung übergab.

Auf Seite 61 des leider verloren gegangenen Handexemplars Fermats von Bachets Ausgabe des Diophant befand sich zur VIII. Frage, Buch II (Propositum quadratum dividere in duos quadratos) folgende Bemerkung Fermats: „Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratorum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet."

Deutsch: „Es ist ganz unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate, und allgemein, irgendeine Potenz außer dem Quadrate in zwei Potenzen von demselben Exponenten zu zerfällen. Hiefür habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, aber der Rand ist zu schmal, ihn zu fassen."

Dieser Satz erhielt den Namen „großer" Fermatischer Satz zum Unterschied von dem schon früher unter dem Namen des Fermatischen in der Zahlentheorie bekannten Satze.

Auf den Historiker, der seine Geschichte in einer groß angelegten Arbeit behandelte, harrt der Satz noch.

Zum Zwecke einer ganz allgemeinen Uebersicht sei hier angeführt, daß Euler für die Spezialfälle $n = 3$ und 4 im Sinne der „descente infinie ou indéfinie" Fermats Beweise aufstellte, die in der Folge auf andere Werte für n, jedoch ohne Berücksichtigung der Andeutungen Fermats, erweitert wurden. So zeigte Legendre unter Berücksichtigung der Arbeiten Dirichlets die Unmöglichkeit für $n = 5$, 1832 Dirichlet für $n = 2 . 7$, 1840 Lamé für $n = 7$. Der erfolgreichste von allen war Kummer, der in seiner bereits anfangs zitierten Arbeit den Unmöglichkeitsbeweis mit Hilfe der von ihm erfundenen „idealen Primzahlen" für alle Exponenten erbrachte, die ungerade Primzahlen sind und in den ersten $\frac{n-3}{2}$ Bernoullischen Zahlen nicht als Faktoren vorkommen. Er erweiterte später selbst noch dieses Resultat und seine Arbeiten dienten als Grundlage zu weiteren erfolgreichen Untersuchungen.

Zum eingehenderen Studium der Geschichte des großen Fermatischen Satzes seien hier in chronologischer Folge folgende Erscheinungen angeführt:

D. Gambioli: „Memoria bibliographica sul l'ultimo teorema di Fermat." (Periodico di Math. 1901.)

Sommer J.: „Das letzte Theorem von Fermat." (Vorlesungen über Zahlentheorie, Leipzig 1907.)

Lind Benno: „Ueber das letzte Fermatsche Problem." (Abhandlungen zur Geschichte der Math., Heft XXVI/2. Teubner, Leipzig, 1910.) Auf diese Arbeit sei besonders verwiesen; hier findet sich die einschlägige Literatur fast vollständig und übersichtlich geordnet.

Herr A. Fleck hat, nach dem „Sprechsaal“ des „Archiv für Mathematik und Physik“ (herausgegeben von Jahnke, Berlin) zu schließen, die nicht immer dankbare Aufgabe übernommen, die seit Juli 1908 recht zahlreich einlangenden Beweise zu prüfen und zu berichtigen. Er selbst hat in den Sitzungsberichten der Berliner mathematischen Gesellschaft (VIII. Jg., 5. St., 1909) „Miscellen zum großen Fermatschen Problem“ veröffentlicht.

Im Anschluße an diese kurze historische Skizze mögen einige Bemerkungen des Verfassers über die Ursachen folgen, warum es nach seiner Meinung nicht gelungen ist, das Problem im Sinne Fermats allgemein und mit Mitteln zu lösen, die dieser zur Verfügung hatte.

Alle, von Euler bis Kummer und bis auf unsere Tage, begingen den Fehler, daß sie von der als unmöglich zu beweisenden Ganzzahligkeit ausgingen und aus der Beschaffenheit der ganzen Zahlen, aus den Beziehungen der drei Größen x, y und z der Gleichung untereinander, ferner aus den Beziehungen dieser Größen zu den jeweilig angenommenen Exponenten Sätze abzuleiten trachteten, aus denen sich die von Fermat behauptete Unmöglichkeit ergeben sollte.

Durch dieses Suchen nach neuen, allgemeinen Sätzen wurde die Zahlentheorie ungemein bereichert und das bereits erwähnte Wort Fermats hat sich im vollsten Sinne erfüllt. Dem angestrebten Ziele ist man jedoch, wenn die unendliche Anzahl der Werte für n in Betracht gezogen wird, nur wenig näher gekommen, ohne andererseits bewiesen zu haben, daß Fermat mit seinem Ausspruche Unrecht habe.

Alle scheinen übersehen zu haben, daß ganze Zahlen Messungsergebnisse zwischen homogenen und kommensurabeln Größen sind, somit auch nur Spezialfälle von Größen überhaupt darstellen können.

Fermat, ein genialer Geometer und ausgezeichneter Kenner der Schriften der Alten, fußte mit seinen Anschauungen wegen der Beschäftigung mit der Geometrie und mit der Arithmetik des Altertums im Bereiche der kontinuierlichen Größen, was auch der Name zeigt, den er seiner Beweismethode gegeben: „descente infinie ou indéfinie“, d. h. die unendliche oder unbestimmte Abnahme. Eine solche ist nur bei kontinuierlichen Größen möglich.

Euler hat zwar bei seiner Beweisführung für $n = 3$ und 4 ein von Fermat selbst angedeutetes Verfahren, das eine Anwendungsform der „descente infinie on indéfinie“ darstellt, eingeschlagen, sich jedoch nur auf diese zwei Spezialfälle von Exponenten beschränkt, ohne das Problem von vornherein ganz allgemein zu fassen, woran ihn gerade der Umstand hindern mußte, daß er spezielle Werte wählte.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei hier bemerkt, daß Euler bei $n = 4$ den Beweis erbringt, daß $a^4 + b^4 \lesseqgtr c^2$, bei angenommener Ganzzahligkeit aller drei Glieder.

Kummer gelang es, die Richtigkeit der Behauptung Fermats für eine ganze Reihe von Werten für n, nämlich für alle ungeraden Primzahlen < 100 mit Hilfe seiner „Primideale“ zu erweisen. Seine Resultate wurden bis in die jüngste Zeit noch erweitert und es scheint zweifellos, daß sie sich noch weiter vervollständigen lassen werden. Ob es jedoch auf diesem oder auf einem andern, rein auf die Ergebnisse des Studiums der ganzen Zahlen gegründeten Wege je gelingen wird, einen Beweis für die Behauptung Fermats zu erbringen, ist eine Frage, auf die uns wahrscheinlich die nächste Zukunft noch keine Antwort geben wird.

Ein im Sinne und mit den elementaren Mitteln Fermats, der „descente infinie ou indéfinie“, geführter Beweis muß somit von kontinuierlichen homogenen Werten ausgehen, die sich hier ergebenden Folgerungen feststellen und untersuchen, ob und inwieweit sich die Forderung der Ganzzahligkeit sämtlicher drei Glieder mit diesen Ergebnissen in Einklang bringen läßt.

Im folgenden gestattet sich der Verfasser seinen Beweis, den er im Sinne Fermats allgemein und mit Hilfe der „descente infinie ou indéfinie“ führt, der Oeffentlichkeit zu übergeben mit dem Hinweise darauf, daß ihn die kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu Wien in der Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 7. Juli 1910 als versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität übernommen hat.

Die Gleichung 1. $x^n + y^n = z^n$ gilt allgemein, wenn wir die Forderung der Ganzzahligkeit aller drei Glieder fallen und dafür kontinuierliche, also auch inkommensurable Werte zulassen. Sie drückt in diesem Falle aus, daß sich jede Größe n-ten Grades sei sie geometrisch oder hypergeometrisch, in zwei mit ihr homogene Größen zerfällen läßt.

Bei kontinuierlicher Abnahme des z^n ergeben sich folgende Gleichungen:

$$z^n = x^n + y^n$$
$$z_1^n = x_1^n + y_1^n$$
$$z_2^n = x_2^n + y_2^n$$
$$z_3^n = x_3^n + y_3^n$$

u. s. w. ad infinitum; somit:

$$z^n . z_1^n . z_2^n . z_3^n = p^n + q^n = (x^n + y^n)(x_1^n + y_1^n)(x_2^n + y_2^n)(x_3^n + y_3^n).$$

Wegen der kontinuierlichen Abnahme von z^n kann gesagt werden, daß jede Summe zweier homogener Größen, die der Gleichung 1. genügen, aus Faktoren besteht, die alle, auch die kleinsten, Summen zweier Größen desselben Grades sind. Anders ausgedrückt lautet dieser Satz folgendermaßen: Jede beliebige Summe von zwei homogenen Größen, die der Gleichung 1. genügen, gibt, mit einer Summe von zwei Größen desselben Grades multipliziert, wieder eine Summe zweier Größen desselben Grades.

Satz: Tritt die Einschränkung der Kommensurabilität der Wurzeln der drei Glieder der Gleichung 1. ein, so kann ihr außer der 1. und 2. keine höhere Potenz genügen.

Beweis: Die kleinsten Faktoren ganzer Zahlen sind die absoluten Primzahlen, die außer der Zahl 2 ungerade Zahlen, somit als Summen je einer geraden und einer ungeraden Zahl aufzufassen sind. Der Primfaktor 2 ist die Summe zweier beliebiger Potenzen von 1.

Die ganzzahligen Summen von zwei Potenzgrößen desselben Grades lassen sich allgemein einteilen in solche von der Form: $a^{(2n+1)2^m} + b^{(2n+1)2^m}$ und solche von der Form: $a^{2^n} + b^{2^n}$

1. Ganzzahlige Summen von der Form:

$$a^{(2n+1)2^m} + b^{(2n+1)2^m}$$

können, da sie durch $a + b$ teilbar sind, keine absolute Primzahl ergeben. Umgekehrt ausgedrückt heißt dies, daß es in der unendlichen Reihe der ungeraden absoluten Primzahlen keine einzige gibt, welche die Summe von zwei derartigen Potenzgrößen wäre.

Daraus folgt, daß Summen dieser Form, da ihre kleinsten Faktoren eben die Primfaktoren sind, der aus der Gleichung 1 abgeleiteten Konsequenz nicht genügen können, außer wenn $n = 0$

und $m = 0$, das heißt in der I. Potenz; denn für Summen von der Form $a + b$ entfällt die algebraische Teilbarkeit, sie bleiben bloß der numerischen unterworfen, können also Primzahlen oder Produkte von solchen sein. Sie können, da für beide Summanden beliebige ganze Zahlen zulässig sind, alle ganzen Zahlen, also auch alle Primzahlen ergeben.

Jede Summe von zwei Größen der I. Potenz ist somit als ganze Zahl ein Produkt aus lauter Summen von zwei Größen der I. Potenz.

2. Auch für die Summen von der Form $a^{2^n} + b^{2^n}$ entfällt die algebraische Teilbarkeit; sie sind als ganze Zahlen nur der numerischen unterworfen, können also Primzahlen oder Produkte von solchen sein.

Nachfolgende Tabelle zeigt die Einerstellen von Potenzgrößen von der Form a^{2^n} für die Werte $n \gtreqless 1$ und von ungeraden Summen zweier solcher Potenzgrößen:

$n = 0$	$n = 1$	Ungerade Summe	$n \geqq 2$	Ungerade Summe
0	0	.. 1	0	.. 1
1	1		1	
2	4	.. 3	6	.. 7
3	9	.. 5	1	
4	6	.. 7	6	
5	5	.. 9	5	.. 5
6	6		6	
7	9		1	
8	4		6	
9	1		1	

Man ersieht aus dieser Tabelle Folgendes:

a) Ist $n > 1$, so stehen an der Einerstelle der aus zwei solchen Potenzgrößen gebildeten ungeraden Summen 1, 5 oder 7, da ganzzahlige Potenzen mit solchen Exponenten bloß auf 0, 1, 5 und 6 endigen können. Primzahlen, die sich als Summen zweier solcher Potenzgrößen ergeben, können somit bloß auf 1 oder 7 endigen. Diese zwei Gruppen von Primfaktoren reichen aber einesteils nicht hin, um Zahlen hervorzubringen, die auf 5 endigen, und ergeben andernteils $(\ldots 7 \times \ldots 7 = \ldots 9 \times \ldots 7 = \ldots 3)$ Zahlen, die nicht Summen zweier in Rede stehender Potenzgrößen sein können, was die Unmöglichkeit der Erfüllung der aus der Gleichung 1. abgeleiteten Konsequenz für Werte von $n > 1$ bedeutet.

b) Ist $n = 1$, handelt es sich also um Quadrate, so können die ungeraden Summen zweier auf 1, 3, 5, 7, 9 endigen. Sie ergeben somit auch Primfaktoren, bekanntlich sind es alle Primzahlen von der Form $4n + 1$, die in allen beliebig kombinierten Produkten wieder Zahlen mit einer der angeführten Endziffern geben müssen, so daß der Annahme der Ganzzahligkeit sämtlicher Werte in der Gleichung $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)$ u. s. w. $= g^2 + h^2$ nichts im Wege steht. Der gerade Primfaktor 2 ist die Summe zweier ungerader Quadrate, genügt somit auch der in 1. ausgesprochenen Folgerung.

Die ungeraden Primzahlen von der Form $4n + 1$ reichen mit dem Primfaktor 2 hin, um alle ganzzahligen Summen relativ primer Quadrate hervorzubringen. Die übrigen Primzahlen, die alle die Form $4n - 1$ haben, können in Summen von zwei ganzzahligen Quadraten als gemeinschaftliches Maß beider, somit nur als Quadrate auftreten.

Zusammengefaßt lautet das Ergebnis vorliegender Untersuchung folgendermaßen: Der aus der Gleichung 1. abgeleiteten Konsequenz vermögen nur die I. und II. Potenz in ganzen und wegen der Homogenität der Gleichung auch in gebrochenen Zahlen zu genügen; denn nur Summen zweier ganzzahligen Größen der I. und der II. Potenz ergeben absolute Primzahlen, die auf 1, 3, 5, 7, 9 endigen, so daß nur von diesen zwei Potenzen der Gleichung: $(a^n + b^n)(c^n + d^n)(e^n + f^n)$ u. s. w. $= g^n + h^n$ ganzzahlig entsprochen werden kann, von welcher Gleichung der Fall $(p^n + q^n)^n = r^n + s^n$ nur ein Spezialfall ist.

Zum Schlusse seiner Arbeit gestattet sich der Verfasser an dieser Stelle dem Herrn Dr. Baumhackl, Bibliothekar an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, für dessen liebenswürdige Hilfe bei Beschaffung der nötigen Literatur den ergebensten Dank auszusprechen.

Für seine freundschaftlichen und stets fördernden Ratschläge stattet er ferner Herrn Dr. Hugo Iltis den besten Dank ab.

Nachtrag.

Die im Vorangehenden entwickelte geometrische Auffassung des Problems hat zu dem schon Diophant bekannten Satze der Algebra geführt, dass

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

Die Möglichkeit dieser algebraischen Umformung sowie die Unmöglichkeit einer solchen für alle Exponenten, die grösser als 2 sind, folgt aus dem binomischen Lehrsatze.

Die Möglichkeit, beziehungsweise Unmöglichkeit der Lösung der Gleichung $z^n = x^n + y^n$ in rationalen Zahlen wurde mit der Zusammensetzung der Primzahlen begründet.

Der Vollständigkeit halber möge hier darauf verwiesen sein, dass, wenn die Deduktionen für Summen richtig sind, sie auch für Differenzen Geltung haben müssen; denn die Gleichung $z^n = x^n + y^n$ kann auch geschrieben werden: $x^n = z^n - y^n$.

Algebraisch lässt sich wieder

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac \pm bd)^2 - (ad \pm bc)^2$$

aus demselben Grunde wie oben umformen. Diese Umformung ist aus gleichem Grunde für Exponenten unmöglich, die grösser als 2 sind.

Auf ähnliche Weise wie bei den Summen lässt sich nachweisen, dass Primzahlen, die alle 5 ungerade Einerstellen haben können, nur zwischen 2 Grössen der 1. oder 2. Potenz als Differenz möglich sind; denn zwischen 2 Potenzen desselben Grades mit geradzahligen Exponenten können Primzahlen als Differenzen überhaupt nicht auftreten, wenn der Exponent grösser als 2 ist. 2 Potenzgrössen desselben Grades mit ungeraden Exponenten ergeben als Differenz Primzahlen, die blos auf 1 endigen können, wenn der Exponent die Form $4n + 1$ hat und das n irgend eine ganze Zahl ausser 0 bezeichnet. Sie ergeben Primzahlen, die nur auf 1, 7 oder 9 endigen können, wenn der Exponent die Form $4n - 1$ hat, bei gleicher Bedeutung des n.

Der Verfasser.