muskel ist oval und an jenen anstossend, doch scheint es, als ob er bei älteren Exemplaren vom hintern Schliessmuskel entfernt ist, da bei denselben in der Schale zwischen dem hintern Fussmuskeleindruck und dem Schliessmuskeleindruck ein ziemlich breiter Zwischenraum sich befindet.

Bei aufmerksamer Vergleichung der vorliegenden Beschreibung des Thieres von M. margaritifera mit jener des Thieres von M. Bonellii (s. meine frühere Abhandlung Jahrgang 1866 Nr. 9.) dürfte zur Genüge erhellen, dass sich diese beiden Arten in erheblichen Beziehungen von einander unterscheiden, und daher letztere Art unmöglich weiter unter das Genus Margaritana belassen werden kann. Auch die Unterschiede dieser beiden Arten hinsichtlich der Schale, vornehmlich der Schlossbildung glaube ich am a. O. scharf genug hervorgehoben zu haben. Ebenso habe ich auch die unterscheidenden Merkmale, wieder zwischen M. Bonellii und den Gattungen Unio und Anodonta, und zwar sowohl dem Thiere als auch der Schale nach, in meiner mehrerwähnten früheren Abhandlung hinreichend genug nachgewiesen, als dass es nöthig wäre, selbe hier nochmals zu wiederholen.

Da nun M. Bonellii *Fér.*, sowohl dem Thiere, als auch der Schale nach sich von allen übrigen Unioniden erheblich unterscheidet, so dürfte das auf diese Art in meiner oberwähnten früheren Abhandlung gegründete neue Genus „Microcondylaea" wohl annehmbar sein.

Eine neue Theorie der constanten Kräfte

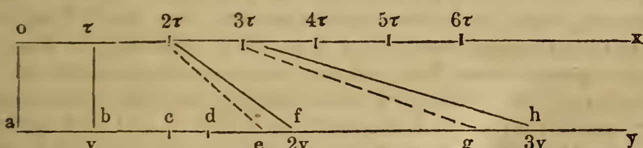
von

LAMBERT v. WEST.

I.

Der freie Fall der irdischen Körper, dieses Beispiel einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, war das Vorbild, nach welchem die Beobachter der Naturgesetze die uns nun eigenen Begriffe über die gleichförmig beschleunigte Bewegung gebildet, aber auch, ohne es zu ahnen, bedeutend eingeschränkt haben; so zwar, dass in dieser Hinsicht selbst die mathematische Behandlung der physikalischen Dimensionen, der wir sonst oftmals die Erweiterung unseres Blickes von der speciellen, bekannten und sichtbaren Wahrnehmung zu vorher unbekannten, allgemeinen und unsichtbaren Thatsachen verdanken, ohne vollständigen Erfolg hervorging. Diese wenigen Blätter werden nämlich ohne Schwierigkeit darthun, dass das angebliche allgemeine Gesetz $S = C\,T + \frac{1}{2}\,G\,T^2$ keineswegs für alle gleichförmig beschleunigten Bewegungen Geltung hat, dass es nur für eine Unterabtheilung Richtigkeit besitzt und das wirkliche allgemeine Gesetz erst ein Resultat der hier folgenden Schlüsse ist, welche sich mit strenger Genauigkeit an den natürlichen Sachverhalt binden, von dem man bisher durch eine unstatthafte Annahme, die bloss zur Vereinfachung des Calcüls angewendet wurde, weit abirrte. Denn, wenn wir in sämmtlichen physikalischen Werken und Lehrbüchern Einsicht nehmen, gleichviel ob sie sich mit der Elementarmathematik oder höheren Analysis behelfen, so werden wir leicht bemerken, dass sie durchgehends die Voraussetzung gebrauchen: es sei einerlei, ob man bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, welche eine endliche Zeit T andauert, das zu einem unendlich kleinen Zeittheilchen τ gehörige Wegstückchen (möge τ nun dem Anfange, der Mitte oder dem Ende der Zeit T inbegriffen sein) als gleichförmig beschleunigt, oder, wie es einfacher zu benützen sei, als gleichförmig zurückgelegt in Rechnung bringe. Jedoch da stehen wir dem Kerne des Irrthums gerade gegenüber und wenden uns zunächst wider ihn, um bald zum wahren Standpuncte zurückkehren zu können, den man nicht hätte verlassen sollen.

A. Es wird gewiss erlaubt sein, die Zeit T, in der eine gleichförmig beschleunigte Bewegung vor sich geht, durch eine gerade Linie o x (s. Fig.*) anschaulich zu machen und es wird auch nicht den mindesten störenden Einfluss auf die Bewegung äussern, wenn wir die endliche Zeit T aus vielen unendlich kleinen, untereinander gleichen Zeittheilchen zusammengesezt denken, jedes einzelne von ihnen τ nennen und die Reihenfolge dieser Zeitchen ebenfalls an der Linie o x versinnlichen. In Beziehung auf den Weg dürfen wir die Anordnung treffen, dass sein Anfangspunct in a liege, dass seine Richtung und Fortsetzung aber durch die Linie a y, also parallel zu o x, dargestellt sei.



Verfolgen wir jetzt die gleichförmig beschleunigte Bewegung eines materiellen Punctes in einem jeden der unendlich kleinen Zeittheilchen τ, so begreifen wir, dass er im ersten

*) Da die Figur bei dem vorhandenen Mittel nicht genau ausführbar war, so sind im Puncte (2τ) die von e, f und x, und im Puncte (3τ) die von g, h und x ausgehenden, convergirenden Geraden zusammen treffend zu denken.

Zeitchen τ, abgesehen davon auf welche Art, so doch gewiss, ein unendlich kleines Wegstückchen a b vollenden wird (welches die Figur im unendlichfach vergrösserten Massstab vor Augen führt), und, dass er im Endpuncte b jedenfalls auch irgend eine Geschwindigkeit, etwa von der Grösse v besitzen muss. Um aber nun das Wegstückchen zu bestimmen, dass im zweiten Zeitchen τ vollendet wird, gibt es kein anderes Mittel, als früher jene zwei Fälle, welche, wie oben schon erwähnt, der heutigen Physik für „einerlei“ gelten, von einander zu trennen; nämlich, entweder vorauszusetzen, dass das erste unendlich kleine Wegstückchen a b mit gleichförmiger, oder, dass es mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit zurückgelegt worden sei.

War a b eine gleichförmige Bewegung, so wird im zweiten Zeitchen τ das Wegstückchen b e $=$ 2 a b (d. i. bis zur punctirten Linie) ebenfalls gleichförmig zurückgelegt werden und die Endgeschwindigkeit im Puncte e $=$ 2v sein. Denn, die derartige constante Kraft bewirkt, für sich allein betrachtet, im zweiten Zeitchen τ dasselbe, was sie im ersten konnte, d. h. sie bringt den materiellen Punct wieder um eine unendlich kleine Strecke b c $=$ a b, in angeblich gleichförmiger Bewegung weiter; und weil das Beharrungsvermögen, mit der Endgeschwindigkeit v, ebenfalls einen gleichförmigen Weg b c bedingt, so geht aus dieser Zusammensetzung der gleichförmige Weg 2. b c $=$ b e $=$ 2 a b hervor.

War aber, im Gegentheil, a b eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, so wird im zweiten Zeitchen τ das Wegstückchen b f $=$ 2 a b $+$ c d (d. i. bis zur nichtpunctirten, ausgezogenen Linie) ebenfalls gleichförmig beschleunigt vollendet werden und die Endgeschwindigkeit in f gleich 2v sein. Denn, die constante Kraft in blosser Gemeinschaft mit jener Trägheit, welche in einem Anfangszeitchen τ auftritt, bewirkt im zweiten Zeitchen τ genau dasselbe, was sie im ersten vermochte, d. h. sie bringt den materiellen Punct wieder um eine unendlich kleine Strecke b c (deren Endgeschwindigkeit v ist) mit gleichförmig beschleunigter Bewegung weiter; weil aber das erste Wegstückchen a b gleichförmig beschleunigt zurückgelegt wurde, so war daher die Geschwindigkeit in jedem Zeitpuncte des ersten Zeitchens kleiner, als die Endgeschwindigkeit v desselben ersten Zeitchens τ und daher muss der Weg, welcher bloss vermöge jener Beharrung mit der Endgeschwindigkeit v (also mit einer in jedem Zeitpuncte grösseren Geschwindigkeit) im zweiten Zeitchen τ zurückgelegt wird, um ein Stückchen c d grösser sein als a b, und das Beharrungsvermögen wird demnach, für sich allein betrachtet, im zweiten Zeitchen τ den gleichförmigen Weg (b c + c d) bedingen; folglich wird die constante Kraft und die Beharrung zusammen genommen den gleichförmig beschleunigten Weg $bc + (bc + cd) = bf = 2ab + cd$ herbeiführen, und $v + v = 2v$ die Endgeschwindigkeit im Puncte f sein.

Suchen wir nun das Wegstückchen, welches im dritten Zeitchen τ zurückgelegt wird. War a b eine gleichförmige Bewegung, so war, wie schon erwähnt, auch b e eine gleichförmige, und die Endgeschwindigkeit in e gleich 2v., und daraus ergibt sich, dass das Wegstückchen, welches im dritten Zeitchen gleichförmig zurückgelegt wird, $eg = 3ab$ ist, während die Endgeschwindigkeit in g die Grösse 3v erreicht.

War hingegen a b eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, so war, wie bereits gezeigt wurde, auch b f eine solche, und die Endgeschwindigkeit in f gleich 2v. Daraus folgt aber, dass das Wegstückchen, welches im dritten Zeitchen τ vollendet wird, der gleichförmig beschleunigte Weg $fh = 3ab + 2cd$ ist und die Endgeschwindigkeit in h die Grösse von 3v hat. Denn, die constante Kraft in blosser Gemeinschaft mit jener Trägheit, welche in einem Anfangs- τ auftritt, bewirkt auch im dritten Zeitchen τ eine gleichförmig beschleunigte Bewegung von solcher Grösse wie a b und mit der Endgeschwindigkeit v; aber auch da kommt wieder noch ein Beharrungsvermögen hinzu, welches, wie bereits gezeigt wurde, im Puncte f die Geschwindigkeit 2v besitzt, und daher, für sich allein betrachtet, einen Weg von der Grösse $2(ab + cd)$ bewirken muss (wenn man nämlich berücksichtiget, was schon beim ersten Zeitchen gesagt wurde, dass eine Beharrungsgeschwindigkeit v in einem Zeitchen τ den Weg $ab + cd$ bewirkt). Folglich wird die constante Kraft in Gemeinschaft mit dem Beharrungsvermögen im dritten Zeitchen τ den gleichförmig beschleunigten Weg $fh = ab + 2(ab + cd) = 3ab + 2cd$ erzielen und die Endgeschwindigkeit im Puncte h wird gleich 3v sein.

Wir glauben nun mit der weiteren Wiederholung des schon zur Genüge entwickelten Gedankenganges einhalten zu müssen, um nicht eine überflüssige Umständlichkeit zu begehen, da die beiden Gesetze, gemäss welchen die Wegstückchen für jedes Zeitchen τ, nach der einen und der anderen Voraussetzung, anwachsen, vollkommen klar vor Augen liegen. Es ist nämlich die ganze Reihenfolge der unendlich vielen Wegstückchen, welche in der endlichen Zeit $T = \infty\tau$ zurückgelegt werden, wenn während eines jeden unendlich kleinen Zeitchens τ

die Bewegung als gleichförmig angenommen wird, ausgedrückt durch die hier durch Beistriche getrennten Grössen a b, 2 a b, 3 a b, 4 a b ..... und ∞ a b.

Dazu im Gegensatze ist jedoch die Reihenfolge jener unendlich vielen Wegstückchen, welche in derselben Zeit, $T = \infty\tau$ aber so zurückgelegt werden, dass die Bewegung in jedem unendlich kleinen Zeitchen τ gleichförmig beschleunigt ist, nämlich die Reihe der folgenden durch Beistriche getrennten Grössen a b, (2 a b + c d), (3 a b + 2 c d), (4 a b + 3 c d) ..... und [∞ a b + (∞ —1) c d].

Ein Blick auf diese beiden Reihen belehrt uns, dass die Summe der zweiten Reihe um den Ausdruck c d + 2 c d + 3 c d + 4 c d + ... + (∞ —1) c d grösser als die Summe der ersten Reihe ist, also um eine arithmetische Reihe grösser ist, deren Summe, mit F bezeichnet, sich durch die Gleichung $F = [c\,d + (\infty - 1)\,c\,d]\ {}^1/_2\,(\infty - 1) = \infty\,c\,d\ {}^1/_2\,(\infty - 1) = {}^1/_2\,c\,d\,\infty^2$ darbietet. An dieser Stelle sind wir bei dem allein richtigen Standpuncte angelangt, wo wir einsehen müssen, dass sich die Physik eines grossen Fehlers schuldig macht, indem sie jenes oben erwähnte „einerlei" behauptet; wir erkennen im Gegentheil, dass der in derselben Zeit T gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Weg, um die (wie sich bald zeigen wird) endliche d. i. beträchtliche Grösse ${}^1/_2\,c\,d\,\infty^2$, grösser wird, wenn man die in einem jeden unendlich kleinen Zeitchen τ bewirkte Bewegung, von der Grösse a b, gleichförmig beschleunigt, statt gleichförmig annimmt. Denn ist c d (d. h. der unendlich kleine Fehler, um welchen die Physik das im zweiten Zeitchen τ vollendete Wegstückchen zu klein voraus setzt) selbst nur eine unendlich kleine Grösse der zweiten Ordnung, also durch $c\,d = u^2$ dargestellt: so ist dennoch der grosse Fehler F, um den der Weg in der Zeit T zu klein ausfällt, eine endliche Grösse $F = {}^1/_2\,u^2\,\infty^2$; weil, nach mathematischen Grundsätzen, das Product aus einer unendlich kleinen Grösse irgend einer Ordnung mit einer unendlich grossen Grösse derselben Ordnung keineswegs gleich der Nulle, sondern ein unbestimmter Ausdruck ist, der jeden endlichen Werth vorstellen kann, also in der Rechnung niemals vernachlässigt werden darf, gleichwie dies in der Physik geschehen ist.

Der Fehler unserer Wissenschaft liegt demnach nicht bloss darin, dass die Bewegung während eines einzigen unendlich kleinen Zeitchens τ für gleichförmig gehalten wird, was allerdings statthaft ist, sondern darin, dass man sich, bei dem Aufsuchen die Weglänge, diese Freiheit ∞ mal erlaubt, wodurch sich nothwendig ein ansehnlicher Fehler endlicher Grösse zusammen addiren muss.

Aus dem Gesagten ergibt sich ferner, als selbstverständlich, dass die Ableitungen der mittleren Geschwindigkeit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung, welche wir in den physikalichen Büchern finden, und die sich stets auf die eben widerlegte Voraussetzung gründen, dass es gestattet sei, die gleichförmig beschleunigte Bewegunng während eines jeden unendlich kleinen Zeitchens als gleichförmig anzusehen: gänzlich verfehlt sind. Denn es wurde bei unserer Entwicklung insbesondere auch gezeigt, dass bei der richtigen Voraussetzung, einer gleichförmig beschleunigten Geschwindigkeit in jedem Zeitchen τ, die Endgeschwindigkeit ebenfalls v, 2v, 3v, 4v..... u. s. w. sind, also dieselben Endgeschwindigkeiten innerhalb derselben Zeit T vorkommen, wie bei der falschen Voraussetzung; jedoch so, dass dieselben auf einen um $\frac{1}{2}$ c d. ∞^2 grösseren Weg vertheilt sind. Das heisst, bei denselben Endgeschwindigkeiten und daher insofern auch gleichen*) arithmetischen mittleren Geschwindigkeit kann dessen ungeachtet die Weglänge derselben Zeit eine verschiedene sein. Es ist demnach ein nutzloses Beginnen diese mittlere Geschwindigkeit zu suchen, da, selbst in dem Falle, dass man sie fände, sie zur Bestimmung der Weglänge nicht behilflich würde sein.

Wir gelangen, unsere Erklärungen berücksichtigend, zum Schlusse, dass wir nur dadurch zum richtigen Standpuncte zurückkehren, wenn wir bei einer jeden gleichförmig beschleunigten Bewegung auch jedes während eines jeden unendlich kleinen Zeitchens vollendete Wegstückchen als ebenfalls gleichförmig beschleunigt zurückgelegt ansehen und in die Rechnung einführen, und darauf beruht die folgende Entwicklung des wirklich allgemeinen Gesetzes solcher Bewegungen.

B. Eine Bewegung ist eine gleichförmig beschleunigte, wenn die Geschwindigkeiten in den Endpuncten aller verfliessenden Zeiten, welche vom Anfange der Bewegung gerechnet vorüber ziehen, in demselben steigenden Verhältnisse zu einander stehen,

---

*) Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung in den kleinsten Zeitchen τ mussen jedoch nebst dem auch alle inneren Geschwindigkeiten von allen diesen Zeitchen zu den Endgeschwindigkeiten addirt und durch die Anzahl beider dividirt werden um die mittlere Geschwindigkeit zu finden; welche, weil sie auch dadurch erhalten wird, dass man zum arithmetischen Mittel der Endgeschwindigkeiten das arithmetische Mittel der inneren Geschwindigkeiten addirt, um letzteres grösser ist als das obige irrthümliche Mittel.

wie diese Zeiten. Aus dieser Definition erhielt die Physik den Satz $V = G\,T$, welcher das Erkennungsgesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist, zu dessen Anwendung wir im Folgenden schreiten werden, und in dem die Endgeschwindigkeit V einer beliebigen Zeit T als ein Product der Endgeschwindigkeit G der ersten Zeiteinheit und der Zeit T erscheint.

Jede Zeit (sei sie nun eine ganze Zahl, ein echter Bruch oder eine ganze Zahl und ein echter Bruch), allgemein T, lässt sich auf einen Bruch, allgemein m/n, so zurückführen, dass dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind*), und es ist, weil die Zeiteinheit, wie der Name sagt, gleich 1 ist, T das m-fache eines n-ten Theils der Zeiteinheit, d. h. $T = m.\,{}^1/n$.

Man bezeichne mit $S_{(m/n)}$ den Weg, welcher in der Zeit $T = m.\,{}^1/n$ und mit der Beschleunigung G (d. i. die Endgeschwindigkeit der ersten Zeiteinheit) vom Beweglichen zurückgelegt wird, und es sei die Aufgabe, diesen unbekannten Weg durch die gegebene Zeit und Beschleunigung auszudrücken.

Indem $s_{(^1/n)}$ den im ersten n-ten Theil der Zeiteinheit gleichförmig beschleunigt zurückgelegten Weg bezeichnet, kann man $s_{(^1/n)} = s_{(^1/n)}$ setzen. Ferner, sei $s_{(^2/n)}$ der im zweiten n-ten Theil der Zeiteinheit gleichförmig beschleunigt zurückgelegte Weg und man bedenke, dass derselbe die Summe ist des Weges von der Grösse wie $s_{(^1/n)}$, welchen die constante Kraft nur noch in Gemeinschaft mit jener Trägheit, die in einer Anfangszeit ${}^1/n$ auftritt, in jeder Zeit ${}^1/n$ veranlasst, und des Weges, der vermöge der Trägheit mit der Endgeschwindigkeit $G.\,{}^1/n$ des ersten ${}^1/n$ Theils während des zweiten ${}^1/n$ Theils zurückgelegt wird: so leuchtet ein, dass $s_{(^2/n)} = s_{(^1/n)} + G.\,{}^1/n^2$ ist, und dass wir bei diesem Vorgange das Erkennungsgesetz $V = G\,T$ auch nicht während des unendlich kleinsten Zeitchens ausser Kraft gesetzt, sondern nur befolgt haben. Weil wir auch selbst für diese Zeitchen die Wirkung der constanten Kraft als in untrennbarer Gemeinschaft zum Beharrungsvermögen stehend und daher als gleichförmig beschleunigt angenommen haben.

*) Im ersten Falle bildet die ganze Zahl den Zähler und die Einheit den Nenner, im zweiten ist der Bruch schon fertig, und im dritten Falle erhält man die Bruchform durch das sogenannte Einrichten. Es steht dazu frei, die Zeiteinheit unendlich klein anzunehmen.

Auf Grundlage desselben Gedankenganges ergibt sich für den Weg, welcher in dem dritten n-ten Theil der Zeiteinheit durchlaufen wird, $s_{(3/n)} = s_{(1/n)} + 2\ G.\ 1/n^2$, für den Weg des vierten n-ten Theils $s_{(4/n)} = s_{(1/n)} + 3\ G.\ 1/n^2$, u. s. w., schliesslich für den Weg des letzten, d. i. m-ten, n-ten Theils der Zeiteinheit $s_{(m/n)} = s_{(1/n)} + (m-1)\ G.\ 1/n^2$.

Addirt man diese m verschiedenen Gleichungen, so erhält man $s_{(1/n)} + s_{(2/n)} + s_{(3/n)} + s_{(4/n)} + \ldots\ldots + s_{(m/n)} = S_{(m/n)} = m\ s_{(1/n)} + G\ m\ (m-1)/2\ n^2$. (I.

Für $T = 1$, d. i. für die Zeiteinheit, ist $m/n = 1$, oder $m = n$; dies in die Gleichung I eingeführt, gibt den Weg der ersten Zeiteinheit, welcher im Allgemeinen a heisse, $S_{(n/n)} = a = n\ s_{(1/n)} + G.\ (n-1)/2\ n$. Daraus bekommt man

$s_{(1/n)} = a/n - G.\ (n-1)/2\ n^2$. (II.

Substituirt man nach Gleichung II den Werth für $s_{(1/n)}$ in die Gleichung I, so findet man $S_{(m/n)} = a.\ m/n - 1/2\ G.\ m/n + 1/2\ G\ (m/n)^2$ oder, weil $m/n = T$ ist, schliesslich

$S = a\ T - 1/2\ G\ T + 1/2\ G\ T^2$. (III.

Weil wir aber diese Formel III aus den gemeinschaftlichen Voraussetzungen aller gleichförmig beschleunigten Bewegungen abgeleitet haben, und wir uns bei der Ableitung der Grundeigenschaft aller gleichförmig beschleunigten Bewegungen bedienten (durch deren Anwendung oben die arithmetische Reihe $G1/n^2$, $2\ G1/n^2$, $3\ G1/n^2$, u. s. w., erhalten wurde): so ist die Formel III die allgemeine Formel aller gleichförmig beschleunigten Bewegungen, und jede Weglänge, welche aus ihr berechnet wird, ist, in Beziehung auf die dabei angewendeten Daten, ein gleichförmig beschleunigter Weg.

Betrachten wir die gefundene, allgemeine Formel III, so bemerken wir, dass, nachdem G gegeben ist, sich in ihr noch die unbekannte Grösse a befindet. Weil aber die Zeiteinheit in dieser Entwicklung beliebig grösser oder kleiner gesetzt werden kann und dann derselben auch ein grösseres oder kleineres a, als Weg der ersten Zeiteinheit entspricht: so ist die Formel III. eine Grössenbeziehung zwischen je zwei zu einem und demselben gleichförmig beschleunigten Bewegungsacte gehörigen Weglänge, welche in Zeiten zurückgelegt werden, die sich wie eine beliebige Grösse T : 1 verhalten. Mit anderen Worten, das Erkennungsgesetz $V = G\ T$ der gleichförmig beschleunigten Bewegung fordert durch die unbeirrt und allein aus diesem Gesetze hervorgegangene Formel III. nichts weiter, als dass zwischen je zwei Wegen desselben gleichförmig beschleunigten Bewegungsactes eine durch diese Formel ausgedrückte Beziehung herrsche, verlangt aber nicht, dass einer derselben, z. B. a, eine bestimmte, durch das gegebene G bedingte Grösse habe. Ferner, da aus dem Erkennungsgesetz $V = G\ T$ nur die Gleichung III. hervorgeht und daher jede andere Gleichung auch eine Folgerung aus der Formel III. sein müsste, so kann nur diese Formel und das Erkennungsgesetz die Grösse a in ihrer Beziehung zu den übrigen Grössen beschränken, und wenn diese Beschränkung ein Belieben in der Aufnahme der Grösse a zulässt, so ist die Ausübung desselben vollkommen statthaft und richtig.

Nun kommt im Erkennungsgesetz $V = G\ T$ die Grösse a zwar nicht vor, aber nichtsdestoweniger spricht es selbst doch eine Beschränkung derselben aus. Denn aus dem Erkennungsgesetz folgt, dass die Endgeschwindigkeit G der ersten Zeiteinheit grösser ist, als jede innerhalb der ersten Zeiteinheit auftretende Geschwindigkeit der Bewegung, und daher müsste, wenn die erste Zeiteinheit mit der Endgeschwindigkeit G gleichförmig zurückgelegt worden sein würde, der Weg $G.\,1 > a$ gewesen sein (weil letzteres nur im letzten Augenblicke der Zeiteinheit mit der Geschwindigkeit G und sonst mit lauter kleineren Geschwindigkeiten zurückgelegt wird), dazu muss aber schon vorher $G > a$ bestanden sein; d. h. es besteht eine Beschränkung darin, dass $a < G$ sein muss.

Ferner, da die Formel III. oder $S = T\,(a - \frac{1}{2}\,G + \frac{1}{2}\,G\,T)$ stets positive Werthe für S liefern muss (weil G und T positiv sind), so muss der Ausdruck innerhalb der Klammer, nämlich $a - \frac{1}{2}\,G + \frac{1}{2}\,G\,T > o$, d. h. bei jeder beliebigen Zeit T positiv sein; für $T = u$, gleich einer unendlich kleinen Grösse, kann aber noch dazu $a - \frac{1}{2}\,G + \frac{1}{2}\,G\,u \overline{\overline{>}}\, o$ sein, um der selbstverständlichen Anforderung zu genügen, der zufolge auch nichteinmal ein unendlich kleiner Weg negativ d. h. der ganzen Bewegung entgegengesetzt sein darf. Betrachten wir den ersten Fall, nämlich $a - \frac{1}{2}\,G + \frac{1}{2}\,G\,u = o$, so ergibt sich daraus die unbekannte Grösse a als $a = \frac{1}{2}\,G - \frac{1}{2}\,G\,u$, oder schliesslich als $a = \frac{1}{2}\,G$, weil die unendlich kleine Grösse $\frac{1}{2}\,G\,u$ gegen die endliche Grösse $\frac{1}{2}\,G$ verschwindet.

Hingegen ergibt sich aus der Betrachtung des zweiten Falles, nach welchem $a - \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} G u > o$ sein muss, die unbekannte Grösse a nicht mit Bestimmtheit, sondern nur in einer Begrenzung dargestellt, nämlich $a > \frac{1}{2} G - \frac{1}{2} G u$, oder, wegen des Verschwindens der unendlich kleinen Grösse $\frac{1}{2} G u$, auch $a > \frac{1}{2} G$. Ferner, da beide Fälle, sowohl der mit dem Gleichheitszeichen $(a - \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} G u = o)$, als auch der mit dem Ungleichheitszeichen $(a - \frac{1}{2} G + \frac{1}{2} G u > o)$ aus derselben Bedingung entstanden sind, nämlich für die unendlich kleinen Zeiten (von jeder Basis und Ordnung) positive Wegstückchen zu liefern, so ist nicht der geringste Grund vorhanden, einem dieser beiden Fälle vor dem anderen den Vorzug zu geben, wenn es sich um die Bestimmung der unbekannten Grösse a handelt. Nach diesen beiden Fällen wurde aber bereits ermittelt, dass $a = \frac{1}{2} G$, oder $a > \frac{1}{2} G$ in die Formel III gesetzt werden muss, um auch für die kleinsten Zeiten positive Wege zu erhalten. Es wurde jedoch schon früher und zwar direct aus dem Erkennungsgesetze gefunden, dass $a < G$ sein muss; daher darf die Bestimmung aus dem zweiten Fall, nämlich $a > \frac{1}{2} G$, nur in Verbindung mit der aus dem Erkennungsgesetze hervorgegangenen Begrenzung $a < G$ gebraucht werden; während der erste Fall, mit $a = \frac{1}{2} G$, schon an und für sich, weil $\frac{1}{2} G < G$ ist, der Bedingung $a < G$ entspricht.

Wir gelangen somit zu dem wichtigen Schlusse, dass, weil es zwischen $a > \frac{1}{2} G$ und $a < G$ unendlich viele Werthe gibt, die sowohl dem Erkennungsgesetze $V = G\,T$ als auch der Formel III vollkommen Genüge leisten und auch für die unendlich kleinsten Zeiten positive Wege lieferen, sich daher auch eben so viele verschiedene gleichförmig beschleunigte Bewegungen aufstellen lassen, die alle von der Formel III umfasst werden, von welcher die Formel $S = \frac{1}{2} G\,T^2$ nur ein specieller Fall ist.

Beginnt jedoch die gleichförmig beschleunigte Bewegung mit einer Anfangsgeschwindigkeit C, so geht die Formel III. (indem noch der gleichförmige Weg $C\,T$ hinzu kommt) in die Formel $S = C\,T + (a\,T - \frac{1}{2} G\,T + \frac{1}{2} G\,T^2)$ über und von dieser ist wieder $S = C\,T + \frac{1}{2} G\,T^2$ ein specieller Fall. Was zu beweisen war.

Nebenbei bemerkt, es wird wohl Niemand im Ernste glauben, dass die Formel III mit der längst bekannten Formel $S = C\,T + \frac{1}{2} G\,T^2$ eine und dieselbe sei und sich nur dem äusseren Anblicke nach von letzterer unterscheide; denn man muss sogleich begreifen, dass diese letztere zu einer Bewegung gehört, welche mit einer Anfangsgeschwindigkeit C beginnt, während die Formel III als nur für solche gleichförmig beschleunigte Bewegungen geltend abgeleitet wurde, welche gar keine Anfangsgeschwindigkeit (d. h. eine solche, welche gleich der Nulle ist) haben.

Schliesslich dringt sich uns die Ueberzeugung auf, dass, während zur Bestimmung der Weglänge bei einer gleichförmigen Bewegung zwei Stücke, nämlich die Geschwindigkeit C und die Zeit T genügen, dazu bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung drei Stücke nothwendig sind: die Zeit T der Bewegung, die Endgeschwindigkeit (Beschleunigung) G der ersten Zeiteinheit und auch die Weglänge a der ersten Zeiteinheit.

C. Wir haben bereits bei A. bewiesen, dass bei einer und derselben Beschleunigung G dennoch in derselben Zeit T eine Weglänge von verschiedener Grösse hervorgehen kann, indem jene oben erwähnte arithmetische Reihe, in der sich c d befindet, eben durch verschiedene unendlich kleine Werthe von c d (welche von verschiedener Basis und Ordnung sein können) vielerlei Werthe zu besitzen fähig ist.

Im Folgenden wird aber auch bewiesen werden, wie die physische Natur der constanten Kräfte beschaffen sein muss, damit sie bei demselben G ein verschiedenes c d und verschiedenes a bewirken können.

Die Weglänge S, welche ein materieller Punct durch eine constante Kraft in der Zeit T vollendet, kann, was Jedermann gerne zugestehen wird, nicht das alleinige Ergebniss des Beharrungsvermögens sein, denn die Beharrung im Bewegungszustande setzt ja einen solchen vorhergehenden Bewegungszustand, der die alleinige Wirkung einer constanten Kraft ist, schon voraus; und daher ist es klar, das dem Beharrungsvermögen nur ein Theil s' von der Weglänge S zuzuschreiben ist, während der Rest s eine ganz reine Wirkung der fortwährende Thätigkeit der constanten Kraft sein muss; dass demnach $S = s + s'$ ist.

Es ist aber auch einleuchtend, dass in einem jeden noch so unendlich kleinen Zeitchen die Bestandtheile der Wege s und s' mit einander untrennbar verschmolzen sind, dass jedoch, wenn man die Weglänge s und s' von einander sondern könnte, s' (wegen der allmähligen Anhäufung der Geschwindigkeiten) ein gleichförmig beschleunigter, s (d. i. die reine Wirkung der constanten Kraft) aber ein gleichförmig zurückgelegter Weg sein müsste. Die constante Kraft würde nämlich für sich allein einen gleichförmigen Weg bewirken; indem ohne Beharrungsvermögen der materielle Punct nach jeder Wirkung der constanten Kraft immer wieder augenblicklich zur Ruhe käme, wenn nicht die Kraft die Bewegung allemal wieder vom Neuen und mit derselben Eigenschaft aufnehmen würde, was ebensoviel heisst, als dass bei blosser constanter Kraft die Bewegung gleichförmig bliebe. Ferner, wenn die constante Kraft für sich allein den gleichförmigen Weg s zurücklegen würde, so ist es auch gewiss, dass dies mit irgend einer Geschwindigkeit, welche wir c nennen, geschehen müsste. Damit gelangen wir zu dem Schlusse, dass, wenn eine constante Kraft P für sich allein (ohne Gemeinschaft mit der Trägheit) in derselben Zeit T in welcher die gleichförmig beschleunigte Bewegung vor sich geht, deren Resultat der Weg S ist, nur die Weglänge $s < S$ mit der Geschwindigkeit c in der Wirklichkeit zurücklegt: dann die Wegpuncte von s nicht alle Wegpuncte von S decken können und dass, je nachdem s, bei einem und demselben S, grösser oder kleiner ist, auch dieses Decken ein mehr oder weniger vollständiges ist. Ferner ist es aber auch klar, dass sich nur dort, wo solche Deckungspuncte vorhanden sind, Wirkungspuncte der constanten Kraft befinden können*), die sich daher gleichfalls mehr oder weniger dicht, oder, was dasselbe ist, mit verschiedener Continuität darbieten müssen. Auf eine Verschiedenheit der Continuitäten der constanten Kräfte lässt sich aber unsere kurz vorher gemachte Voraussetzung, dass es bei demselben S verschiedene s geben könne, vollkommen genau zurückführen. Denn daraus folgt, dass auf die Länge von s nicht allein die Geschwindigkeit c, sondern auch die Grösse der Continuität k der betreffenden constanten Kraft einen unabhängigen Einfluss ausübt, und daher ferner, dass die Gleichung $S = s + s'$ mit jener von $S = f(c, k) + f_1(c, k)$ identisch ist (weil nämlich die Continuität k und die Geschwindigkeit c selbstverständlich auch auf den gleichförmig beschleunigten Weg s' der ansteigenden Trägheitszustände einen Einfluss äussern müssen, welcher eben durch das Functionszeichen f_1 zum Ausdrucke kommt).

*) Denn, würde die constante Kraft mit einer vollkommenen Continuität begabt sein, so müsste die Kraft in einem jeden Zeitpuncte von T, aber auch in einem jeden Wegpuncte des ganzen Weges S (z. B. einer Fallhöhe) vom Neuen gegenwärtig sein und daher jeder neue Punct von S. in einem neuen, anderen, in seinem eigenen Zeitpuncte zurückgelegt werden müssen Gibt es dagegen in Wirklichkeit Wegpuncte von S, welche ohne der Wirkung der constanten Kraft zurückgelegt wurden, z. B. die obigen nicht gedeckten Puncte, so kann daher die betreffende constante Kraft auch keine vollkommene Continuität besessen haben. Weil aber in allen Fallen $s < S$ ist, daher immer nicht gedeckte Puncte von S gibt, so ist eine vollkommene Continuität in Gemeinschaft mit der Trägheit ein Unding.

Diese Gleichung aber spricht den Satz aus, dass sich für jedes S unendlich vielerlei beliebige $s = f(c, k)$ ergeben; denn da c und k von einander unabhängige Grössen sind, so sind dieselben durch die beiden Gleichungen $s = f(c, k)$ und $S = s + f_1(c, k)$ gerade hinreichend bestimmt. Wir gelangen somit zu dem Schlusse, dass, wenn wir eine Verschiedenheit in der Continuität der constanten Kräfte annehmen dürfen, es dann auch bei einem und demselben S ein beliebiges s oder umgekehrt, für ein beliebiges S ein und dasselbe s geben müsse. Weil aber bereits erwähnt wurde, dass die Wegpuncte von s nicht alle Wegpuncte von S decken können und daher den nicht gedeckten Wegpuncten von S ebensoviele Lücken in der Continuität der Wirkung der constanten Kraft entsprechen müssen: so ist es daher eine sehr zulässige Annahme, dass sowohl die Lücken als auch die Nicht-Lücken von verschiedener Ausdehnung sein können, d. h. dass es constante Kräfte von verschiedener Continuität geben könne.

Unter dieser Voraussetzung ist aber $G = F(c, k)$ und $a = F_1(c, k)$; zufolge dessen kann für ein und dasselbe G ein beliebiges a angenommen werden, weil dem entsprechend c und k durch diese beiden Gleichungen bestimmt sind.

Es ist demnach auch die Eigenschaft der constanten Kräfte dargelegt worden, welche sie haben müssen, damit es für ein und dasselbe G verschiedene a, oder für ein und dasselbe a verschiedene G geben könne; was bereits früher, durch die Formel III und die über die Begrenzung der Grösse a ausgeführten Untersuchungen, als eine nothwendige Folge des in der Wirklichkeit liegenden Erkennungsgesetzes $V = G\,T$ bewiesen wurde.