Strukturfragen

in der Theorie der allgemein-invarianten Gravitationsgleichungen.

×

Von
Adalbert Bokowski
in Osnabrück.

Dem Naturwissenschaftlichen Verein in Osnabrück
zum 60jährigen Bestehen.

Inhaltsübersicht.

Problemstellung.

In einer Arbeit in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie von 1916 (Berl. Ber. 1916, S. 688; vgl. dazu auch Berl. Ber. 1918, S. 154) hat bereits A. Einstein die Bemerkung gemacht, daß man sich bei der Behandlung der meisten speziellen (nicht prinzipiellen) Probleme auf dem Gebiete der Gravitationstheorie damit begnügen kann, die g_{ik}, die Einsteinschen Gravitationspotentiale, in erster Näherung zu berechnen. Dabei werden die allgemein-invarianten Feldgleichungen (ihr Ansatz folgt später in I, § 1) für das materielose bzw. materielle Feld zu Grunde gelegt und es ist dann lediglich ein mathematisches Kunststück, ihre Integration unter geeigneten Randbedingungen in der gewünschten Genauigkeit durchzuführen. So konnte bekanntlich Einstein seine drei berühmt gewordenen „Effekte“, die Krümmung des Lichtstrahls beim Vorbeigehen an der Sonne, das Vorrücken des Merkurperihels und die Rotverschiebung der Spektrallinien qualitativ und quantitativ richtig dartun. Zur Berechnung dieser Effekte verwendet man aber von den erwähnten Feldgleichungen verhältnismäßig wenig. Im Falle der ersten Näherung reduzieren sich beispielsweise die nichtlinearen Differentialgleichungen auf lineare, die dazu noch von sehr einfachem Bau sind.

Die vorliegende Arbeit hat eine ausführliche Auseinandersetzung der bei derartigen Überlegungen auftretenden Strukturfragen solcher Gleichungen zum Gegenstand. Die Zielsetzung ist, durch Näherungsverfahren die Folgerungen aus den Prinzipien der Relativitätstheorie abzuleiten. Und das Resultat: es sei hier kurz vorweggenommen, unter Beschränkung der Transformationen der Einsteinschen Theorie auf unendlich kleine und gleichzeitiger Entwicklung der Gravitationspotentiale g_{ik} nach steigenden Potenzen desselben bei der Koordinatentransformation auftretenden Entwicklungsparameters gelangt man zu einer Art vereinfachter Feldgleichungen, die gerade ausreichend sind, die jeweils vorliegenden physikalischen Effekte mit hinreichender Genauigkeit zu beschreiben. In erster Näherung sind diese Gleichungen wirklich bedeutend einfacher als der Einsteinsche Ansatz, besonders gilt dies von dem von mir ausgebildeten Erzeugungsverfahren. In zweiter Näherung liegt es allerdings in der Natur der Sache, daß das Erzeugungsverfahren genau so kompliziert bleibt, wie der allgemeine Ansatz.

Die Gliederung der Untersuchungen gibt die vorangeschickte Inhaltsübersicht. Zum Verständnis der Arbeit ist die genaue Kenntnis der Einsteinschen Relativitätstheorie erforderlich. Der Leser sei in dieser Beziehung auf die zusammenfassende Darstellung von A. Einstein, die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, ferner die Werke von H. Weyl, M. v. Laue (Band II), den Enzyklopädieartikel VI 2 der mathematischen Enzyklopädie von W. Pauli jr. und die Eddington-Ostrowskische Darstellung bei Springer (Grundlehren der math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 18) verwiesen.

I.
Das statische Gravitationsfeld der allgemeinen Relativitätstheorie.

§ 1. Feldgleichungen.

Vorausgesetzt sei die Abwesenheit von „Materie“, dann lauten die allgemein-invarianten Feldgleichungen

$$(1)\quad R_{kl} = \frac{\partial}{\partial w^l}\begin{Bmatrix} km \\ m \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial w^m}\begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} kn \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lm \\ n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} mn \\ n \end{Bmatrix} = 0,$$

dabei bedeutet R_{kl} der aus dem Riemannschen Krümmungstensor durch Verjüngung abgeleitete Krümmungstensor zweiten Ranges, die geschweiften Klammern aber die bekannten Christoffelschen Dreiindizessymbole zweiter Art

$$(2)\quad \begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix} = g^{il}\begin{bmatrix} jk \\ i \end{bmatrix} = {}^1\!/\!_2\, g^{il}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial w^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial w^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial w^i}\right) \quad .$$

Hier sowie in fast allen weiteren Formeln gilt die Einsteinsche Verabredung, daß über jeden Index zu summieren ist, der in einem Gliede zweimal vorkommt. In einigen speziellen Fällen sind zur besonderen Verdeutlichung Summenzeichen gesetzt. Als Koordinaten sind die Hilbertschen Weltparameter w^s $(s = 1, 2, 3, 4)$, die allgemeinsten Raum-Zeitkoordinaten der vierdimensionalen Welt eingeführt (Göttinger Nachr. 1915, math. phys. Klasse S. 395). Bei Behandlung der Spezialfälle, die sich aus der Gravitationswirkung eines einzelnen isolierten Massenpunktes ergeben, berechnete Einstein die Gravitationspotentiale g_{ik} vermittels des Ansatzes der sog. Nachbarmaßbestimmung (man vgl. z. B. Hilbert, Gött. Nachr. 1917, math. phys. Kl. S. 65) durch sukzessive Approximationen aus (1).

§ 2. Kritik der Einsteinschen Integrationstheorie.

Im Folgenden beweise ich:

1. Auch bei Anwendung der näherungsweisen Integration sind die erhaltenen Lösungen die einzigen Lösungen der Feldgleichungen (1) unter vorgegebenen Randbedingungen.

Damit wird eine Lücke bei Einstein ausgefüllt, der sich s. Zt. in seiner ersten Arbeit über diese Frage (Berl. Ber. 1915, S. 831) damit begnügte, nnr die Möglichkeit der Lösung festzustellen.

2. Zur Behandlung der Einsteineffekte in der allgemeinen Relativitätstheorie sind gewisse I. und II. Näherungsfeldgleichungen völlig ausreichend.

Wir führen zunächst anstelle der Weltparameter w^s die allgemeinsten reellen Raum-Zeitkoordinaten ein x^s ($s = 1, 2, 3, 4$), indem wir setzen

$$w^1 = x^1,\ w^2 = x^2,\ w^3 = x^3,\ w^4 = ix^4$$

und erteilen den g_{ik} die entsprechende Bedeutung (Hilbert Grundlagen der Physik 2. Mitteilung). Für die g_{ik} gelten folgende Annahmen:

1. Statisches Feld, d. h. $g_{i4} = g_{4i} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) und Unabhängigkeit aller Komponenten der g_{ik} von der Zeit.
2. Zentrisch-symmetrische Verteilung der Gravitation um den Koordinatenanfangspunkt,
3. $g_{ik} = \delta_{ik}$ im Unendlichen.

Dann ist die Matrix der Koeffizienten der allgemeinsten diesen Annahmen entsprechenden Maßbestimmung durch das Schema gegeben:

$$\begin{aligned} & g_{ik} = \delta_{ik} + a h_{ik}\ (ik = 1, 2, 3) = \text{räumlicher Maßtensor} \\ (3)\quad & g_{i4} = g_{4i} = 0 \\ & g_{44} = \delta_{44} - a h_{44} - a^2 h^*_{44} \quad , \end{aligned}$$

wenn man den räumlichen Maßtensor in erster, den zeitlichen bis zur zweiten Näherung berechnet. a ist bekanntlich die durch die Masse des anziehenden Körpers bestimmte Konstante, der sog. Gravitationsradius. In (3) sind

δ_{ik} und δ_{44} die bekannten in der Hauptdiagonale des Maßtensors der pseudo-euklidischen Geometrie stehenden Werte. Infolge der 2. Annahme sind h_{44} und h^*_{44} Funktionen der Entfernung $r = \sqrt{x^{1\,2} + x^{2\,2} + x^{3\,2}}$ allein, die h_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ aber lassen sich — wie leicht ersichtlich ist — in der Form schreiben

$$h_{ik} = x^i x^k h(r) \tag{4}$$.

Das weitere Problem ist nun dieses, die drei wesentlich willkürlichen Funktionen h_{44}, h^*_{44} und $h(r)$ in allgemeinster Weise so zu bestimmen, daß sie den Feldgleichungen (1) genügen. Zunächst ergibt sich für dieselben unter Berücksichtigung des Ansatzes (3) eine wesentliche Vereinfachung. Die Christoffelschen Symbole gehen über in

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} jk \\ r \end{bmatrix}_g &= a \begin{bmatrix} jk \\ r \end{bmatrix}_h \\ \begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix}_g &= g^{lr} \begin{bmatrix} jk \\ r \end{bmatrix}_g = a \begin{bmatrix} jk \\ l \end{bmatrix}_h + a^2 \begin{Bmatrix} jk \\ l \end{Bmatrix}_h + a^2 \begin{bmatrix} jk \\ l \end{bmatrix}_{h^*} \end{aligned} \tag{5}$$

und damit die Feldgleichungen in

$$\underset{\text{(in 1. Näherung)}}{R_{kl}} = a \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \begin{bmatrix} km \\ m \end{bmatrix}_h - \frac{\partial}{\partial x^m} \begin{bmatrix} kl \\ m \end{bmatrix}_h \right) = 0 \tag{6 I}$$

$$\begin{aligned} \underset{\text{(in 2. Näherung)}}{R_{kl}} = {} & a \left(\frac{\partial}{\partial x^l} \begin{bmatrix} km \\ m \end{bmatrix}_h - \frac{\partial}{\partial x^m} \begin{bmatrix} kl \\ m \end{bmatrix}_h \right) + \\ & + a^2 \Bigg(\frac{\partial}{\partial x^l} \begin{Bmatrix} km \\ m \end{Bmatrix}_h - \frac{\partial}{\partial x^m} \begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}_h + \frac{\partial}{\partial x^l} \begin{bmatrix} km \\ m \end{bmatrix}_{h^*} - \frac{\partial}{\partial x^m} \begin{bmatrix} kl \\ m \end{bmatrix}_{h^*} \\ & + \begin{bmatrix} kn \\ m \end{bmatrix}_h \begin{bmatrix} lm \\ n \end{bmatrix}_h - \begin{bmatrix} kl \\ n \end{bmatrix}_h \begin{bmatrix} mn \\ n \end{bmatrix}_h \Bigg) = 0 \end{aligned} \tag{6 II}$$.

Der an den Klammersymbolen angehängte Buchstabe bedeutet hier, sowie in allen weiteren dieselben betreffenden Formeln, daß die Symbole jeweils nur für den betreffenden Term in der Entwicklung der g_{ik} gelten, der den Buchstaben trägt.

Wir gehen nunmehr zur eindeutigen Bestimmung der drei Funktionen h_{44}, h^*_{44} und $\mathrm{h}(r)$ über.

I. Zwischenbehauptung. Aus $R_{44} = 0$ folgt in erster Näherung $\triangle h_{44} = 0$ und daraus $h_{44} = \frac{a}{r}$ wo $a =$ const.

Beweis: Sofort zu sehen, denn

$$\sum_{m=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 h_{44}}{\partial x^{4\,2}} + \frac{\partial^2 h_{mm}}{\partial x^{4\,2}} - 2 \frac{\partial^2 h_{m4}}{\partial x^m \partial x^4} \right) = 0 \tag{7}$$

geht wegen der Annahme 2 über in

$$\sum_{m=1}^{3} \frac{\partial^2 h_{44}}{\partial x^{m\,2}} = \triangle h_{44} = 0 \quad , \tag{8}$$

wo $\triangle$ den bekannten Laplaceschen Operator bedeutet. Aus (8) folgt aber unter Berücksichtigung der Bedingung für das Unendliche

$$h_{44} = \frac{a}{r} \quad . \tag{9}$$

II. Zwischenbehauptung: Aus $\sum_{s=1}^{3} R_{ss} = 0$ folgt in erster Näherung $h(r) = \frac{c}{r^3}$ (c = const).

Beweis: Die additive Kombination $R_{11} + R_{22} + R_{33}$ (in erster Näherung) gestattet wegen der Kugelsymmetrie die Zusammenfassung der zweiten Ableitungen der g_{ik} in folgender Weise:

$$\triangle \left(\sum_{s=1}^{3} h_{ss} \right) - \sum_{ik} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^i \partial x^k} \quad ; \tag{10}$$

Nullsetzung dieser Differenz ergibt die neue Feldgleichung,

Ich führe nun die Integration dieser Feldgleichung ausführlich durch. Zunächst wird jeder Ausdruck in (10) unter Zugrundelegung von (3) und (4) für sich berechnet. Für den ersten Term ergibt sich:

$$\sum_{s=1}^{3} h_{ss} = r^2 h(r) \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^s} r^2 h(r) = 2 x^s h(r) + x^s r h'(r) \tag{12}$$

(13) $$\frac{\partial^2}{\partial x^{s\,2}}\, r^2 h(r) = 2\,h(r) + \frac{3x^{s\,2}}{r}\, h'(r) + r h'(r) + x^{s\,2} h''(r)$$

(14) $$\triangle\left(\sum_s^3 h_{ss}\right) = 6\,h(r) + 6\,r h'(r) + r^2 h''(r) \quad .$$

Der zweite Term lautet wegen

(15) $$\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^i} = x^k h(r) + \delta^{ik} x^i h(r) + x^i \overset{2}{x^k} \frac{h'(r)}{r} \quad \text{und}$$

(16) $$\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = h(r) + \frac{x^{k\,2}}{r} h'(r) + \frac{x^{i\,2}}{r} h'(r) + \delta_{ik} h(r) + \delta_{ik} \frac{x^{i\,2}}{r} h'(r) + \delta^{ik} \frac{2\,x^{i\,2}}{r} h'(r) - \frac{x^{i\,2} x^{k\,2}}{r^3} h'(r) + \frac{x^{i\,2} x^{k\,2}}{r^2} h''(r)$$

schließlich

(17) $$\sum_{ik} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^i \partial x^k} = 12\,h(r) + 8\,r h'(r) + r^2 h''(r) \quad .$$

(10) gleich Null und für die Terme ihre Werte (14) u. (17) eingesetzt ergibt

(18) $$6\,h(r) + 2\,r h'(r) = 0 \qquad \text{oder}$$

(19) $$\frac{h'(r)}{h(r)} = -\frac{3}{r} \quad .$$

Integriert

(20) $$\log h(r) = -3 \log r + \text{const.}$$

und daraus

(21) $$h(r) = \frac{c}{r^3} \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Die hier noch unbestimmte Integrationskonstante wird durch die

III. Zwischenbehauptung festgelegt. Diese besagt nämlich

III. Z. B. Aus $R_{11} = 0$ folgt in erster Näherung $c = a$.

Beweis: (durch direkte Rechnung)

Es ist:

$$(22)\quad \sum_{m}^{3}\left(\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^{m\,2}}+\frac{\partial^2 h_{mm}}{\partial x^{1\,2}}-2\,\frac{\partial^2 h_{m1}}{\partial x^m\,\partial x^1}\right)-\frac{\partial^2 h_{44}}{\partial x^{1\,2}}=0$$

$$=\triangle h_{11}+\frac{\partial^2}{\partial x^{1\,2}}\left(\sum_m h_{mm}\right)-2\left(\sum_m\frac{\partial^2 h_{m1}}{\partial x^m\,\partial x^1}\right)-\frac{\partial^2 h_{44}}{\partial x^{1\,2}}=0.$$

Als Zwischenrechnung geben wir an:

$$(23)\quad \triangle h_{11}=\frac{2c}{r^3}-\frac{6cx^{1\,2}}{r^5}$$

$$(24)\quad \sum_m h_{mm}=\frac{c}{r}$$

$$(25)\quad \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sum_m h_{mm}\right)=-\frac{c}{r^3}\,x^1$$

$$(26)\quad \frac{\partial^2}{\partial x^{1\,2}}\left(\sum_m h_{mm}\right)=-\frac{c}{r^3}+\frac{3cx^{1\,2}}{r^5}$$

$$(27)\quad \sum_m\frac{\partial^2 h_{m1}}{\partial x^m\,\partial x^1}=\frac{4c}{r^3}-\frac{6x^{1\,2}\cdot 3c}{r^5}-\frac{3c}{r^3}+\frac{3x^{1\,2}\cdot c}{r^5}+\frac{12x^{1\,2}\cdot c}{r^5}$$

$$(28)\quad \frac{\partial^2 h_{44}}{\partial x^{1\,2}}=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(-\frac{ax^1}{r^3}\right)=-\frac{a}{r^3}+\frac{3ax^{1\,2}}{r^5}\quad .$$

Demgemäß geht (22) über in

$$(29)\quad \frac{2c}{r^3}-\frac{6cx^{1\,2}}{r^5}-\frac{c}{r^3}+\frac{3cx^{1\,2}}{r^5}-2\left(\frac{c}{r^3}-\frac{3cx^{1\,2}}{r^5}\right)+\frac{a}{r^3}$$
$$-\frac{3ax^{1\,2}}{r^5}=0$$

$$(30)\quad \frac{-c}{r^3}+\frac{3cx^{1\,2}}{r^5}+\frac{a}{r^3}-\frac{3a\,x^{1\,2}}{r^5}=0\quad ,$$

woraus $c=a$ folgt.

IV. Zwischenbehauptung. Aus $R_{44}=0$ folgt in zweiter Näherung $\triangle h_{44}^{*}=0$ und daraus $h_{44}^{*}=\frac{k}{r}$ $(k=\text{const.})$

Wir haben zum Beweis zunächst R_{44} in zweiter Näherung explizite hinzuschreiben wie folgt

$$(31)\quad a\left\{\sum_m\left[\frac{\partial}{\partial x^4}\begin{bmatrix}4m\\m\end{bmatrix}_h-\frac{\partial}{\partial x^m}\begin{bmatrix}44\\m\end{bmatrix}_h\right]\right\}+a^2\left\{\sum_m\left[\frac{\partial}{\partial x^4}\begin{Bmatrix}4m\\m\end{Bmatrix}_h\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial x^m}\begin{Bmatrix}44\\m\end{Bmatrix}_h\right]+\sum_m\left[\frac{\partial}{\partial x^4}\begin{bmatrix}4m\\m\end{bmatrix}_{h^*}-\frac{\partial}{\partial x^m}\begin{bmatrix}44\\m\end{bmatrix}_{h^*}\right]$$
$$\left.+\sum_{mn}\left[\begin{bmatrix}4n\\m\end{bmatrix}_h\begin{bmatrix}4m\\n\end{bmatrix}_h-\begin{bmatrix}44\\m\end{bmatrix}_h\begin{bmatrix}mn\\n\end{bmatrix}_h\right]\right\}\quad.$$

Machen wir diesen Ausdruck durch Nullsetzen zur Differentialgleichung, so sieht man sofort, daß der mit a multiplizierte Term fortzulassen ist, weil er durch die bereits bekannten Funktionen h_{44} und $h(r)$ erfüllt ist. Das Übrigbleibende schreiben wir mit Unterdrückung des selbstverständlichen Faktors a^2 in der Form

$$(32)\quad \sum_m\left[\frac{\partial}{\partial x^4}\begin{Bmatrix}4m\\m\end{Bmatrix}_h-\frac{\partial}{\partial x^m}\begin{Bmatrix}44\\m\end{Bmatrix}_h\right]+\sum_{mn}\left[\begin{bmatrix}4n\\m\end{bmatrix}_h\begin{bmatrix}4m\\n\end{bmatrix}_h-\right.$$
$$\left.\begin{bmatrix}44\\m\end{bmatrix}_h\begin{bmatrix}mn\\n\end{bmatrix}_h\right]=-\sum_m\left[\frac{\partial}{\partial x^4}\begin{bmatrix}4m\\m\end{bmatrix}_{h^*}-\frac{\partial}{\partial x^m}\begin{bmatrix}44\\m\end{bmatrix}_{h^*}\right]\quad.$$

Nach einer längeren aber elementaren Rechnung, die wir hier unterdrücken wollen, da es sich nur darum handelt, die bekannten Werte für h_{44} und $h(r)$ in die beiden Summen auf der linken Seite von (32) einzusetzen und diese auszuführen, zeigt sich, daß die ganze linke Seite verschwindet. Wir haben also nur die Gleichung

$$(33)\quad \sum_m\left[\frac{\partial}{\partial x^4}\begin{bmatrix}4m\\m\end{bmatrix}_{h^*}-\frac{\partial}{\partial x^m}\begin{bmatrix}44\\m\end{bmatrix}_{h^*}\right]=0$$

zu integrieren, und damit folgt ohne weiteres obige vierte Zwischenbehauptung.

Die summarische Zusammenfassung der Teilbehauptungen ergibt den exakten Nachweis für den am Eingang dieses Paragraphen mitgeteilten Satz. In physikalischer Hinsicht folgt, daß man sich bei der Berechnung der Einsteineffekte mit Näherungsgleichungen begnügen kann, die den augenblicklichen Genauigkeitsanforderungen der Physik voll entsprechen.

§ 3. Allgemeine Relativität und Gruppentheorie.

Bereits 1922 und 1923 zeigte ich in zwei Arbeiten, die in der Physikalischen Zeitschrift Band 23, Seite 511, und in der Zeitschrift für Physik Band 18, Seite 217 abgedruckt sind, daß man die Einsteineffekte unter Beschränkung auf ein Minimum an Hilfsmitteln durchsichtig und anschaulich errechnen kann, wenn man von den Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik ausgeht und dieselben unter Benutzung des Einsteinschen Gedankens von der Relativität durch geeignete Zusatzglieder modifiziert. Unter Verwendung der üblichen Randbedingungen des statischen Einkörperproblems und einiger physikalisch plausibler Zusatzforderungen — Zentralsymmetrie, Charakter eines Newtonschen Potentials hinsichtlich der Ordnung des Null- und Unendlichwerdens und einer gewissen Determinantenbedingung — ließen sich die g_{ik} des Maßtensors (3) eindeutig bestimmen. Ich benutze zunächst die sich mir bietende Gelegenheit, eine kleine Unebenheit der damals gegebenen Darstellung zu glätten. In der zitierten zweiten Arbeit heißt es auf Seite 224 oben: „die Benutzung der Determinantengleichung (7) ergibt $c = 1$, $\bar{c} = 0$.“ Statt dessen ist zu setzen: „durch eine passende Maßstabsänderung kann man z. B. immer erreichen, daß die Konstante c gleich 1 wird, dann folgt aus der Determinantengleichung (7) $\bar{c} = 0$ eindeutig.“ Hinzugesetzt sei noch, daß man statt c zu 1 zu machen, was ich aus Gründen der Einfachheit getan habe, natürlich auch eine andere Normierung wählen könnte, dann ergäbe sich zwar nicht das Schwarzschildsche, aber ein ihm bezüglich der physikalischen Folgerungen durchaus äquivalentes Linienelement.

Viel wichtiger aber für das Thema dieser Arbeit sind die Folgerungen, die ich damals in Bezug auf die Behandlung konkreter physikalischer Spezialprobleme vom Standpunkte des allgemeinen Relativitätsprinzips zog in Übertragung des Kleinschen — geometrischen — „Erlanger Programms“ (Erlangen, A. Deichert, 1872. Abgedruckt in Kleins Ges. Abhandlungen Band I, Seite 460 – 497, Berlin, Springer 1921) auf die Physik. Sind bei Klein geometrische Eigenschaften des dreidimensionalen Raumes z. B., oder allgemeiner einer beliebigen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, durch ihre Invarianz gegenüber den Transformationen der betreffenden der Mannigfaltigkeit zu Grunde liegenden Transformationsgruppe charakterisiert, so sind in der neuen Einsteinschen Physik physikalische Aussagen — Naturgesetze und Experimente — durch ihre Relativität gegenüber beliebigen Punkttransformationen der vierdimensionalen Raum-Zeitwelt der Ereignisse gekennzeichnet. Nach Hilbert (Zweite Note über die Grundlagen der Physik) haben überhaupt nur derartig objektiv gefaßte Aussagen einen physikalischen Sinn. Die Aussage beispielsweise, daß die Gravitationspotentiale im Unendlichen verschwinden sollen, ist eine mit dem Problem fest verbundene, aber eine objektive Aussage, nämlich gegenüber Transformationen, in denen das Unendliche ausgezeichnet ist. Mit Klein läßt sich diese Eigenart des Problems vielleicht so kennzeichnen: Dem Problem sind Sonne und Unendliches adjungiert, die ausgezeichneten Stellen der adjungierten Elemente müssen invariant bleiben. Darin liegt offenbar eine Vorschrift für die zu verwendenden Transformationen, und es erscheint berechtigt, ausgezeichnete Koordinatensysteme zu benutzen. Geht man zur allgemeinen Invarianz formal über, indem man die ausgezeichneten Elemente mittransformiert, so muß man alle physikalischen Aussagen so fassen, daß ihre Beziehungen zu den ausgezeichneten Elementen in dem speziellen Koordinatensystem klar hervortreten und die so gefaßten Aussagen dann allgemeinen Punkttransformationen unterwerfen. Bei Klein heißt es in seinen Ges. Abhandl. Band I, Seite 465, 1. Kursivsatz: „So kann man entweder dem System der Gebilde das Gegebene hinzufügen, und es fragt sich dann nach den Eigenschaften des erweiterten Systems im Sinne der gegebenen Gruppe oder man lasse das System unerweitert, beschränke aber die Transformationen, die man bei der Behandlung zu Grunde legt, auf diejenigen in der gegebenen Gruppe enthaltenen, welche das gegebene Gebilde unverändert lassen (und die wieder notwendig eine Gruppe bilden)." So sind unsere Näherungs-Gravitationsgleichungen des § 2 immer invariante Bildungen im Sinne eingeschränkter Transformationen. Es entsteht — unabhängig von der voraufgegangenen Kritik — die Frage nach ihrer Herkunft und ihrer Art.

II.
Vereinfachte Feldgleichungen.

§ 1. Physikalische Axiome.

I. Die partiellen Differentialgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie sind Gleichungen für Welttensoren, welche aus dem Fundamentaltensor der g_{ik} gebildet werden. Die gesuchten Tensoren sollen invariante Bildungen sein gegenüber unendlichkleinen Transformationen einer Näherungsentwicklung, deren Art im nächsten Paragraphen besprochen wird.

II. Der vereinfachte Welttensor soll die g_{ik} bis zu den zweiten Ableitungen und in diesen linear enthalten (Übertragung der Laplaceschen Differentialgleichung).

III. Der gesuchte Ausdruck soll der allgemeinste seiner Art und eindeutig sein.

§ 2. Unendlichkleine Transformationen und der Begriff der gesteigerten Invarianz.

Es seien $w^i \, (i = 1, 2, 3, 4)$ die im ersten Teil eingeführten Weltparameter. Ferner denken wir uns die gesamten Punkttransformationen

(34) $$w^i = f^i(\overline{w}^1, \ldots \overline{w}^4)$$

nach Potenzen eines sehr kleinen Parameters α entwickelt und bezeichnen als unendlichkleine Transformation erster Ordnung — schlechthin unendlichkleine Transformation —

(35) $$w^i = \overline{w}^i + \alpha \, \varphi^i(\overline{w}^1, \ldots \overline{w}^4)$$

eine solche, die nur die linearen Glieder in α berücksichtigt. Die φ^i bedeuten dabei reguläre Funktionen, die in ganz beliebiger Weise von den Koordinaten abhängig sind. Durch

Weiterentwicklung in (35) kann man zu unendlichkleinen Transformationen höherer Ordnung aufsteigen. So lautet der nächste Schritt:

(36) $$w^i = \overline{w}^i + a\,\varphi^i(\overline{w}^1, \ldots \overline{w}^4) + a^2\,\psi^i(\overline{w}^1, \ldots \overline{w}^4) \quad .$$

Das Bemerkenswerte einer solchen Entwicklung ist die Möglichkeit, zu einer Art successive gesteigerter Invarianz zu gelangen. Diejenigen Größen, welche beispielsweise den erwähnten Transformationen gegenüber invariant bleiben, werden Tensoren eines bestimmten Invarianzbereiches. In nicht mißverständlicher Bezeichnungsweise, die außerdem in der Zahlentheorie üblich ist, wählen wir für solche invariante Bildungen die Nomenklatur „Invariante (bezw. später Tensor) modulo einer bestimmten Potenz des Entwicklungsparameters a“.

Wir merken in diesem Zusammenhange einige für spätere Zwecke wichtige Hilfsformeln an. Der Fundamentaltensor der g_{ik} sei ebenfalls nach wachsenden Potenzen des sehr kleinen Entwicklungsparameters a entwickelt.
Wir setzen:

(37) $$\text{mod. } a^2: \quad g_{ik} = \delta_{ik} + a\,h_{ik}$$

(38) $$\text{mod. } a^3: \quad g_{ik} = \delta_{ik} + a\,h_{ik} + a^2\,h^*_{ik} \quad ,$$

dabei bedeute δ_{ik} den Tensor, dessen Komponenten

(39) $$\delta_{ik} \begin{cases} = +1 & \text{für } i = k \\ = 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad ,$$

und die h_{ik} bezw. h^*_{ik} sind Funktionen der Koordinaten.

Es folge schließlich die Transformationsformel mod. a^3 (mit dem mod. a^2 natürlich einbegriffenen Unterfall) für einen gemischten Tensor der vierten Stufe T^i_{klm}. Sie lautet unter Berücksichtigung von (37)

$$
\begin{aligned}
(40)\quad \overline{T}^{\,d}_{abc}\left(\delta^j_d + \frac{\partial \varphi^j}{\partial \overline{w}^d} + a^2 \frac{\partial \psi^j}{\partial \overline{w}^d}\right) &= T^j_{klm}\left(\delta^k_a\,\delta^l_b\,\delta^m_c\right) + \\
&+ a\left[\frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a}\,\delta^l_b\,\delta^m_c + \frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b}\,\delta^k_a\,\delta^m_c + \frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c}\,\delta^k_a\,\delta^l_b\right] + \\
&+ a^2\left[\delta^l_b\,\delta^m_c\,\frac{\partial \psi^k}{\partial \overline{w}^a} + \delta^k_a\,\delta^m_c\,\frac{\partial \psi^l}{\partial \overline{w}^b} + \delta^k_a\,\delta^l_b\,\frac{\partial \psi^m}{\partial \overline{w}^c} + \right. \\
&\left. + \delta^m_c\,\frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a}\,\frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b} + \delta^k_a\,\frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b}\,\frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c} + \delta^l_b\,\frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a}\,\frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c}\right].
\end{aligned}
$$

Macht man den speziellen Ansatz

$$(41)\qquad T^j_{klm} = A^j_{klm} + a\,B^j_{klm} + a^2\,C^j_{klm} \qquad ,$$

so leiten sich durch Einsetzen von (41) in (40) und Vergleich der Koeffizienten der 0-ten, 1-ten und 2-ten Potenz von a folgende drei Gleichungen ab

$$(42)\quad (a^0)\qquad A^d_{abc}\,\delta^j_d = A^j_{klm}\,\delta^k_a\,\delta^l_b\,\delta^m_c$$

$$
\begin{aligned}
(43)\quad (a^1)\qquad \overline{A}^d_{abc}\,\frac{\partial \varphi^j}{\partial \overline{w}^d} + \overline{B}^d_{abc}\,\delta^j_d &= A^j_{klm}\left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a}\,\delta^l_b\,\delta^m_c + \right. \\
&\left. + \frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b}\,\delta^k_a\,\delta^m_c + \frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c}\,\delta^k_a\,\delta^l_b\right) + B^j_{klm}\,\delta^k_a\,\delta^l_b\,\delta^m_c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(44)\quad (a^2)\qquad & \overline{A}^d_{abc}\,\frac{\partial \psi^j}{\partial \overline{w}^d} + \overline{B}^d_{abc}\,\frac{\partial \varphi^j}{\partial \overline{w}^d} + \overline{C}^d_{abc}\,\delta^j_d = \\
&= A^j_{klm}\left(\delta^l_b\,\delta^m_c\,\frac{\partial \psi^k}{\partial \overline{w}^a} + \delta^k_a\,\delta^m_c\,\frac{\partial \psi^l}{\partial \overline{w}^b} + \delta^k_a\,\delta^l_b\,\frac{\partial \psi^m}{\partial \overline{w}^c}\right. \\
&\quad + \delta^m_c\,\frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a}\,\frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b} + \delta^k_a\,\frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b}\,\frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c} + \\
&\quad \left. + \delta^l_b\,\frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a}\,\frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c}\right) \\
&+ B^j_{klm}\left(\frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a}\,\delta^l_b\,\delta^m_c + \frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b}\,\delta^k_a\,\delta^m_c + \frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c}\,\delta^k_a\,\delta^l_b\right) \\
&+ C^j_{klm}\,\delta^k_a\,\delta^l_b\,\delta^m_c \qquad .
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen ihrer Werte können die δ^n_m aus den Formeln (42), (43) und (44) entfernt und dadurch diese selbst wie folgt vereinfacht werden.

$$(45) \quad (\alpha^0) \quad \overline{A}^i_{abc} = A^i_{abc}$$

$$(46) \quad (\alpha^1) \quad \overline{A}^d_{abc} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \overline{w}^d} + \overline{B}^i_{abc} = A^i_{kbc} \frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a} + A^i_{alc} \frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b} + \\ + A^i_{abm} \frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c} + B^i_{abc}$$

$$(47) \quad (\alpha^2) \quad \overline{A}^d_{abc} \frac{\partial \psi^i}{\partial \overline{w}^d} + \overline{B}^d_{abc} \frac{\partial \varphi^i}{\partial \overline{w}^d} + \overline{C}^i_{abc} = \\ = A^i_{kbc} \frac{\partial \psi^k}{\partial \overline{w}^a} + A^i_{alc} \frac{\partial \psi^l}{\partial \overline{w}^b} + A^i_{abm} \frac{\partial \psi^m}{\partial \overline{w}^c} + \\ + A^i_{klc} \frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a} \frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b} + A^i_{alm} \frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b} \frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c} + \\ + A^i_{kbm} \frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a} \frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c} + B^i_{kbc} \frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^a} + \\ + B^i_{alc} \frac{\partial \varphi^l}{\partial \overline{w}^b} + B^i_{abm} \frac{\partial \varphi^m}{\partial \overline{w}^c} + C^i_{abc} \quad .$$

Am Schluß dieses Paragraphen sei noch folgende Bemerkung gemacht. Die von mir benutzten unendlichkleinen Transformationen unterscheiden sich von den „infinitesimalen" bei Sophus Lie (an vergl. dazu insbesondere Lie, Grundlagen für die Theorie der unendlichen kontinuirlichen Transformationsgruppen 1. Abh. Sächsische Berichte 1891, Band 43, Seite 321, § 3) dadurch, daß ich nirgends davon Gebrauch mache, daß sie Erzeugende der endlichen Gleichung einer eingliedrigen Gruppe im wohlbekannten Sinne sind. Lie sagt a. a. O. darüber: „Eine infinitesimale Transformation ist eine solche unendlichkleine Transformation, in deren Gleichungen die unendlich kleinen Glieder zweiter und höherer Ordnung durch die unendlichkleinen Glieder erster Ordnung vollständig bestimmt sind. Hierin liegt auch der Grund dafür, daß man in den Gleichungen einer infinitesimalen Transformation sich mit der Angabe der Glieder erster Ordnung begnügen und die Glieder höherer

Ordnung ganz weglassen kann, bei einer beliebigen unendlichkleinen Transformation ist dieses Verfahren nicht ohne weiteres erlaubt." Diese Liesche Definition bedarf noch in unserem Zusammenhange einer Erklärung. Lie versteht nämlich unter einer unendlichkleinen Transformation die ins Unendliche fortlaufende Kette aller mit a multiplizierten Terme in dem Ausdruck für die Koordinatentransformation. Das steht aber durchaus im Gegensatz zu unserer Definition einer unendlichkleinen Transformation, als deren Hauptmerkmal wir gerade nur die Berücksichtigung des linearen Terms des Entwicklungsparameters festlegten. Am deutlichsten wird der Unterschied vielleicht so. Das Liesche Symbol wird zur Invariantenbildung benutzt, indem Differential gleichungen aufgestellt werden, als deren Integral sich die Invariante ergibt, z. B. läßt sich eine Invariante gegenüber der Gruppe linearer unimodularer Substitutionen herstellen, indem man die Inkremente der infinitesimalen Transformation gleich Null setzt, was das die Differentialgleichungen für die Invariante ergibt. Umgekehrt wendet man die unendlichkleine Transformation in unserem Sinne auf die beliebig gegebenen Integrale an und untersucht, welchen Differentialgleichungen dieselben zu genügen haben. Treibt man die Entwicklung bis zur unendlichhohen Potenz des Parameters, so sind die Integrale gegenüber beliebigen Punkttransformationen invariant, infolgedessen die Differentialgleichungen gegenüber infinitesimalen Transformationen.

§ 3. Erzeugungsprozeß eines speziellen Tensors in erster und zweiter Näherung.

Sei unter Berücksichtigung der physikalischen Axiome und aus Gründen der Einfachheit ein Tensor zweiter Stufe R_{ik} angenommen. Dann gilt aus invariantentheoretischen Gründen folgende formale Identität

(48) $$R_{ik}\, dw^i\, dw^k = \overline{R}_{ik}\, d\overline{w}^i\, d\overline{w}^k \quad .$$

Sie reduziert sich in dem von uns betrachteten Falle wegen (35), und da R_{ik} von dem g_{ik} der speziellen Form (37) abhängig ist, auf

(49) $$R_{ik} = \overline{R}_{ik} \quad .$$

Nun sehen wir die R_{ik} im wesentlichen als Funktionen der zweiten Ableitungen der g_{ik} an. Man könnte natürlich auch erste Ableitungen zulassen, jedoch zeigt die folgende Rechnung, daß sie im betrachteten Fall 0 werden würden, deshalb seien sie gleich ganz fortgelassen. Die transformierten Ableitungen haben — mit Unterdrückung des selbstverständlichen Faktors a — die Form

$$\frac{\partial^2 \overline{h}_{ik}}{\partial \overline{w}^r \, \partial \overline{w}^s} = \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial w^r \, \partial w^s} - \left(\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \, \partial w^r \, \partial w^s} + \frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w^i \, \partial w^r \, \partial w^s}\right). \tag{50}$$

(50) entsteht durch zweimalige Differentiation der Transformationsformel für (37) gemäß (35). Mit Hilfe von (50) lassen sich nun die Aussagen über R_{ik} bezw. $\overline{R}_{ik}$ unter Berücksichtigung von (49) in folgende Gestalt setzen

$$J\left(\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial w^r \, \partial w^s}\right) = J\left(\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial w^r \, \partial w^s} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \, \partial w^r \, \partial w^s} + \frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w^i \, \partial w^r \, \partial w^s}\right]\right). \tag{51}$$

Sofort sehen wir, daß in (51) die Funktion J nur in einer linearen Verbindung aller verschiedenen zweiten Ableitungen der h_{ik} bestehen kann, anderenfalls würde man Glieder mit a^2 erhalten, was nicht zulässig ist, da mod. a^2 gerechnet wird. Setzt man noch

$$\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial w^r \, \partial w^s} = h_{ikrs} \quad , \tag{52}$$

so gilt bei Berücksichtigung der Symmetrie in den Zeigern ik für J der Ansatz

$$J = A h_{ikrs} + B h_{irks} + C h_{iskr} + D h_{ksir} + E h_{kris} + F h_{rsik} \quad . \tag{53}$$

$A, B, C, D, E, F,$ sind unbestimmte Koeffizienten, im vorliegenden Falle, wie leicht ersichtlich, Konstante. An die Stelle von (51) tritt

$$(54)\quad A h_{ikrs} + B h_{irks} + C h_{iskr} + D h_{ksir} + E h_{kris} + F h_{rsik} =$$

$$= A\left(h_{ikrs} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \partial w^r \partial w^s} + \frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w^i \partial w^r \partial w^s}\right]\right) +$$

$$+ B\left(h_{irks} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \partial w^r \partial w^s} + \frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^s}\right]\right)$$

$$+ C\left(h_{iskr} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \partial w^r \partial w^s} + \frac{\partial^3 \varphi^s}{\partial w^i \partial w^h \partial w^r}\right]\right)$$

$$+ D\left(h_{ksir} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w^i \partial w^r \partial w^s} + \frac{\partial^3 \varphi^s}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r}\right]\right)$$

$$+ E\left(h_{kris} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w^i \partial w^r \partial w^s} + \frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^s}\right]\right)$$

$$+ F\left(h_{rsik} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^s} + \frac{\partial^3 \varphi^s}{\partial w^i \partial w^k \partial w^s}\right]\right) \quad .$$

Setzen wir jetzt $r = s$ und summieren über r, dann geht (54) über in

$$(55)\quad A h_{ikrr} + B h_{irkr} + C h_{irkr} + D h_{krir} + E h_{krir} + F h_{rrik}$$

$$= A\left(h_{ikrr} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \partial w^{r^2}} + \frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w \partial w^{r^2}}\right]\right) + B\left(h_{irkr} -\right.$$

$$\left.\left[\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \partial w^{r^2}} + \frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r}\right]\right) + C\left(h_{irkr} -\right.$$

$$\left.\left[\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \partial w^{r^2}} + \frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r}\right]\right) + D\left(h_{krir} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w^i \partial w^{r^2}}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r}\right]\right) + E\left(h_{krir} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w^i \partial w^{r^2}} +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r}\right]\right) + F\left(h_{rrik} - \left[\frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r} +\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r}\right]\right) \quad .$$

Diese Verfügung ist ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Zwar ist die Gleichsetzung je zweier anderer der vier Indizes und Summation über einen entsprechenden infolge der vorausgesetzten Symmetrie erlaubt und führt zu drei verschiedenen Möglichkeiten, zwei derselben liefern aber identisch Null und die letzte wieder den später folgenden Ausdruck (58), nur mit umgekehrtem Vorzeichen.

Auf der linken und rechten Seite von (55) sind der zweite und dritte, bezw. vierte und fünfte Term gleich, wir können also statt

$$B + C : G$$
$$D + E : H$$

als neue Koeffizenten einführen. Wir schreiben diese Gleichung nicht mehr an, ziehen vielmehr gleich daraus die Folgerung

$$(56) \quad A\left(\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \partial w^{r^2}} + \frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w^i \partial w^{r^2}}\right) + G\left(\frac{\partial^3 \varphi^i}{\partial w^k \partial w^{r^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r}\right) + H\left(\frac{\partial^3 \varphi^k}{\partial w^i \partial w^{r^2}} + \frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r}\right)$$
$$+ F\left(\frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r} + \frac{\partial^3 \varphi^r}{\partial w^i \partial w^k \partial w^r}\right) \equiv 0$$

in allen dritten auftretenden Ableitungen der Transformationsfunktionen φ. Diese Identität ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$(57) \quad \begin{aligned} +A &= -G \\ -H &= +F \end{aligned}$$

gleich einer beliebigen Konstanten c ist. Also ist J

$$(58) \quad J = c\left(\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial w^{r\,2}} + \frac{\partial^2 h_{rr}}{\partial w^i \partial w^k} - \frac{\partial^2 h_{ir}}{\partial w^k \partial w^r} - \frac{\partial^2 h_{kr}}{\partial w^i \partial w^r}\right) \quad .$$

Man könnte in diesen Ausdruck zur Abkürzung die Christoffelschen Dreiindizessymbole erster Art einführen. Der entwickelte Ausdruck ist nicht der allgemeinste seiner Art, vielmehr müßte ein solcher lauten

$$(58^1) \quad (58) + \lambda g_{ik} \quad .$$

wo λ ein beliebiger Parometer ist. Am einfachsten ist es aber, $\lambda = 0$ zu setzen.

Wenden wir uns nun der weiteren Frage zu, wie sich die analoge Rechnung in einer höheren Näherung gestaltet, so ist das Resultat der diesbezüglichen Untersuchung, die der Verfasser angestellt hat, rein negativ. Bereits in zweiter Näherung erweisen sich die Rechenschwierigkeiten wegen der Kompliziertheit der Transformationsformeln und der Unübersichtlichkeit der Endformeln als derartig bedeutend, daß es unzweckmäßig ist, die Rechnung hierherzusetzen.

Daß der gleich Null gesetzte Ausdruck (58) das System der Differentialgleichungen (6, I) repräsentiert, bedarf wohl keiner besonderen Erwähnung.

III.
Eindeutigkeitsfragen.

§ 1. Invariantenbildung nach E. B. Christoffel.

Zum Zwecke der Diskussion der Eindeutigkeit der Näherungsfeldgleichungen bedienen wir uns einer Methode, welche der klassischen Invariantenbildung durch E. B. Christoffel in seiner berühmten Abhandlung: „Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades“ Journ. für reine u. angew. Mathematik 70, 46, 1869 (Ges. Abh. I, S. 352-377) nachgebildet ist. Ich gebe zunächst ihren Grundgedanken an, indem ich mich gleich auf die Näherung beziehe. Evident ist, daß der gesuchte Tensor in erster und zweiter Näherung jedenfalls den Transformationsformeln modulo a^2 und modulo a^3 genügen muß. Diese enthalten aber gemäß (45), (46) und (47) nur erste Ableitungen der Transformationsfunktionen φ und ψ. Diese Tatsache verwenden wir auf der Suche nach einem Tensor, der nicht nur die g_{ik}, sondern auch deren erste Ableitungen, die zweiten Ableitungen und diese linear enthält. Wir studieren einfach die Natur solcher erster und zweiter Ableitungen der g_{ik}. Finden wir, daß in den diesbezüglichen Transformationsformeln höhere als erste Ableitungen der Transformationsfunktionen auftreten, so ist offenbar unserem Problem genügt, wenn es gelingt, diese Größen fortzuschaffen. Wir haben also eine Eliminationsrechnung auszuführen, und unser gesuchter Tensor stellt sich als Resultat der Elimination dar.

Es folgt jetzt im einzelnen die genaue Rechnung in den Bereichen modulo a^2 und modulo a^3.

A. modulo α^2.

Unter Berücksichtigung von (35) und (37) notieren wir zunächst die Transformationsformeln

$$\bar{\delta}_{ab} + \alpha\,\bar{h}_{ab} = \delta_{ab} + \alpha\,h_{ab} + \alpha\,\frac{\partial\varphi^b}{\partial\bar{w}^a} + \alpha\,\frac{\partial\varphi^a}{\partial\bar{w}^b} \quad , \tag{59}$$

ferner für die ersten Ableitungen — unter dauernder Weglassung des selbstverständlichen Faktors α —

$$\frac{\partial\bar{h}_{ab}}{\partial\bar{w}^c} = \frac{\partial h_{ab}}{\partial w^c} + \frac{\partial^2\varphi^b}{\partial\bar{w}^a\,\partial\bar{w}^c} + \frac{\partial^2\varphi^a}{\partial\bar{w}^b\,\partial\bar{w}^c} \quad , \tag{60}$$

Um zu zweiten Ableitungen der h_{ab} zu gelangen, verfahren wir zweckmäßig so: Wir vertauschen in (60) b mit c, also

$$\frac{\partial\bar{h}_{ac}}{\partial\bar{w}^b} = \frac{\partial h_{ac}}{\partial w^b} + \frac{\partial^2\varphi^c}{\partial\bar{w}^a\,\partial\bar{w}^b} + \frac{\partial^2\varphi^a}{\partial\bar{w}^c\,\partial\bar{w}^b} \quad , \tag{61}$$

ferner in (61) a mit b:

$$\frac{\partial\bar{h}_{bc}}{\partial\bar{w}^a} = \frac{\partial h_{bc}}{\partial w^a} + \frac{\partial^2\varphi^c}{\partial\bar{w}^b\,\partial\bar{w}^a} + \frac{\partial^2\varphi^b}{\partial\bar{w}^c\,\partial\bar{w}^a} \tag{62}$$

und bilden den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\Big(\text{Formel (61)} + \text{Formel (62)} - \text{Formel (60)}\Big) \quad ,$$

was unter Einführung der bekannten Christoffelschen Dreiindizessymbole erster Art auf die Gleichung führt

$$\frac{\partial^2\varphi^c}{\partial\bar{w}^a\,\partial\bar{w}^b} = \overline{\begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix}}_h - \begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix}_h \quad . \tag{63}$$

Durch den Übergang von (60) in (63) ist es gelungen, die zweiten Ableitungen der Transformationsfunktionen φ durch erste Ableitungen der h_{ab} auszudrücken. Um zu zweiten Ableitungen der h_{ab} zu kommen, müssen wir (63) differenzieren. Wenn wir noch c durch t ersetzen und c als neuen Differentiationsindex einführen, erhalten wir

$$\frac{\partial^3\varphi^t}{\partial\bar{w}^a\,\partial\bar{w}^b\,\partial\bar{w}^c} = \frac{\partial}{\partial\bar{w}^c}\overline{\begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}}_h - \frac{\partial}{\partial w^c}\begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}_h \quad . \tag{64}$$

In (64) haben wir nun die dritten Ableitungen der Transformationsgrössen explizite dargestellt, wodurch die Elimination sehr einfach wird. Denn wir haben ein nach den Unbekannten aufgelöstes Gleichungssystem und es sind daher alle Eliminationsresultate Relationen, die zwischen diesen aufgelösten Gleichungen bestehen. (64) enthält links dritte Ableitungen der φ, die in den einzelnen Indizes symmetrisch sind, was sich folgendermaßen ausdrücken läßt

$$(65) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{w}^c}\left(\frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial \overline{w}^a \, \partial \overline{w}^b}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{w}^b}\left(\frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial \overline{w}^a \, \partial \overline{w}^c}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{w}^a}\left(\frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial \overline{w}^b \, \partial \overline{w}^c}\right) .$$

Evident ist, daß die **einzigen** Eliminationsresultate durch eine der Gleichungen (65) erschöpft werden. Wegen der Symmetrie von (63) in a und b gibt eine Vertauschung von a und b in (64) $0 = 0$, somit kann nur durch Vertauschung von a (bezw. b) mit c etwas Neues entstehen.

Es folgen einige Zusätze:

I. (65) enthält scheinbar drei Gleichungen, doch folgen aus einer von ihnen die beiden anderen. Denn es sei herausgegriffen

$$(66) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{w}^c}\left(\frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial \overline{w}^a \, \partial \overline{w}^b}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{w}^a}\left(\frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial \overline{w}^b \, \partial \overline{w}^c}\right) .$$

Vertauschen wir noch a mit c, so erhalten wir

$$(67) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{w}^a}\left(\frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial \overline{w}^b \, \partial \overline{w}^c}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{w}^b}\left(\frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial \overline{w}^a \, \partial \overline{w}^c}\right) .$$

II. Aus der gesamten Überlegung folgt, daß es keinen Tensor zunächst modulo α^2 (und ebenso später modulo α^3) gibt, der die ersten Ableitungen der h_{ab} allein enthält.

Beweis: Es ist unmöglich, die in (60) bezw. (63) auftretenden zweiten Ableitungen der φ zu eliminieren, da ebensoviel unabhängige Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind.

Wir haben jetzt in unserer weiteren Rechnung die Formel (64) mit vertauschten Indizes a, c anzuschreiben und die Symmetrieeigenschaft zur Geltung zu bringen. Das ergibt, wenn

$$(68) \qquad \frac{\partial^3 \varphi^t}{\partial \overline{w}^c \, \partial \overline{w}^b \, \partial \overline{w}^a} = \frac{\partial}{\partial \overline{w}^a}\overline{\begin{bmatrix} c\,b \\ t \end{bmatrix}}_h - \frac{\partial}{\partial \overline{w}^a}\begin{bmatrix} c\,b \\ t \end{bmatrix}_h$$

$$(69)\quad \frac{\partial^3 \varphi^t}{\partial \overline{w}^a\, \partial \overline{w}^b\, \partial \overline{w}^c} - \frac{\partial^3 \varphi^t}{\partial \overline{w}^c\, \partial \overline{w}^b\, \partial \overline{w}^a} = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \overline{w}^c} \overline{\begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}}_h - \frac{\partial}{\partial w^c} \begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}_h - \frac{\partial}{\partial w^a} \overline{\begin{bmatrix} cb \\ t \end{bmatrix}}_h + \frac{\partial}{\partial w^a} \begin{bmatrix} cb \\ t \end{bmatrix}_h .$$

Daraus folgt die Transformationsformel

$$(70)\quad \frac{\partial}{\partial \overline{w}^c} \overline{\begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}}_h - \frac{\partial}{\partial \overline{w}^a} \overline{\begin{bmatrix} cb \\ t \end{bmatrix}}_h = \frac{\partial}{\partial w^c} \begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}_h - \frac{\partial}{\partial w^a} \begin{bmatrix} cb \\ t \end{bmatrix}_h$$

und für den Tensor — indem wir α wieder hinzusetzen, da es sich um ein gewisses Endergebnis handelt —

$$(71)\quad \alpha \left(\frac{\partial}{\partial w^l} \begin{bmatrix} km \\ j \end{bmatrix}_h - \frac{\partial}{\partial w^m} \begin{bmatrix} kl \\ j \end{bmatrix}_h \right) = R^j_{klm} \text{ modulo } \alpha^2 \quad ,$$

wie der Vergleich von (70) mit (46) leicht bestätigt. Es kommen ersichtlich dort nur die B-Terme des Tensors T^j_{klm} in Betracht.

Als Eliminationsresultat aus den Transformationsformeln (59), (63) und (64) ergibt sich aber eine Schar von Tensoren von der Gestalt

(72) R^j_{klm} modulo α^2 $+$ λmal einem aus den $g_{ik} = \delta_{ik} + \alpha\, h_{ik}$ gebildeten Tensor vierter Stufe.

Gelegentlich der Diskussion der Formel (65) wies ich bereits auf die Eindeutigkeit der Tensorschar (72) hin. Ich stelle fest, daß die Elimination der dritten Ableitungen der Transformationsfunktionen φ nur auf **eine und nur eine Weise** möglich war (Formel (65) und deren Folgerung.) Hier finde noch folgender Zusatz Platz. Offenbar ist (70) die Transformationsformel für eine Invariante und ist demgemäß — übrigens in völliger Übereinstimmung mit dem II. Teil — (71) als Invariante aufzufassen. Ein Blick auf die Formel (46) sagt aber, daß die Komponenten eines Tensors verlangter Bauart immer Invarianten sind, man könnte diese Tatsache sozusagen als Charakteristikum unseres Verfahrens in erster Näherung ansprechen. Auf Grund der Invarianteneigenschaft folgern wir nun, daß auch lineare Kombinationen der mit beliebigen (zwanzig verschiedenen) Konstanten multiplizierten Ausdrücke (71) der Transformationsformel eines Tensors modulo a^2 genügen. Es besteht also dennoch trotz unseres Verfahrens eine gewisse Vieldeutigkeit in erster Näherung. Wir werden eine Art eindeutiger „Normierung" erst ausführen können, wenn die Rechnung modulo a^3 durchgeführt ist.

B. modulo a^3.

Textlich verläuft alles wie vor, bis auf die Herleitung der analogen zu erweiternden Formel (63) und den Eindeutigkeitsbeweis. Ich beschränke mich daher — abgesehen von diesen beiden Punkten — im folgenden darauf, die erweiterten Formeln hierherzusetzen.

Es gilt die Transformation (36), ferner die Maßbestimmung (38). Die Transformationsformeln sind entsprechend komplizierter als vorher. Es ist

$$(73)\quad \overline{\delta}_{ab} + a\,\overline{h}_{ab} + a^2\,\overline{h}^*_{ab} = \delta_{ab} + a\,h_{ab} + a^2\,h^*_{ab} + a\left(\frac{\partial\varphi^b}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a} + \frac{\partial\varphi^a}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b}\right) + a^2\left(\frac{\partial\psi^b}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a} + \frac{\partial\psi^a}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b} + \frac{\partial\varphi^i}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a}\,h_{ib} + \frac{\partial\varphi^k}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b}\,h_{ak} + \frac{\partial\varphi^k}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a}\,\frac{\partial\varphi^k}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b}\right)$$

$$(74)\quad a\,\frac{\partial\overline{h}_{ab}}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^c} + a^2\,\frac{\partial\overline{h}^*_{ab}}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^c} = a\,\frac{\partial h_{ab}}{\partial\mathfrak{w}^r}\,\frac{\partial\mathfrak{w}^r}{\partial\mathfrak{w}^c} + a^2\,\frac{\partial h^*_{ab}}{\partial\mathfrak{w}^c} + a\left(\frac{\partial^2\varphi^b}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a\,\partial\overline{\mathfrak{w}}^c} + \frac{\partial^2\varphi^a}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b\,\partial\overline{\mathfrak{w}}^c}\right) + a^2\left(\frac{\partial^2\psi^b}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a\,\partial\overline{\mathfrak{w}}^c} + \frac{\partial^2\psi^a}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b\,\partial\overline{\mathfrak{w}}^c}\right) + a^2\,\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a\,\partial\overline{\mathfrak{w}}^c}\,h_{ib} + \frac{\partial\varphi^i}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a}\,\frac{\partial h_{ib}}{\partial\mathfrak{w}^c} + \frac{\partial^2\varphi^k}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b\,\partial\overline{\mathfrak{w}}^c}\,h_{ak} + \frac{\partial\varphi^k}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b}\,\frac{\partial h_{ak}}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^c} + \frac{\partial^2\varphi^k}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a\,\partial\overline{\mathfrak{w}}^c}\cdot\frac{\partial\varphi^k}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b} + \frac{\partial\varphi^k}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^a}\cdot\frac{\partial^2\varphi^k}{\partial\overline{\mathfrak{w}}^b\,\partial\overline{\mathfrak{w}}^c}\,.$$

Nach Ausführung der analogen Operationen wie im Bereiche modulo a^2 in den Formeln (61), (62) und analogen Bildung von $\dfrac{(61) + (62) - (60)}{2}$ ergibt sich hier die Formel

$$(75)\quad a\overline{\begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix}}_h + a^2\overline{\begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix}}_{h^*} = a\left(\begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix}_h + \frac{\partial^2 \varphi^c}{\partial \overline{w}^a \partial \overline{w}^b}\right) + a^2\left(\begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix}_{h^*} + \frac{\partial^2 \psi^c}{\partial \overline{w}^a \partial \overline{w}^b} + \frac{\partial \varphi^r}{\partial \overline{w}^c}\begin{bmatrix} ab \\ r \end{bmatrix}_h + \frac{\partial \varphi^i}{\partial \overline{w}^a}\begin{bmatrix} ib \\ c \end{bmatrix}_h + \frac{\partial \varphi^k}{\partial \overline{w}^b}\begin{bmatrix} ak \\ c \end{bmatrix}_h + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \overline{w}^a \partial \overline{w}^b} h_{ic} + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \overline{w}^a \partial \overline{w}^b} \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial \overline{w}^c}\right).$$

Um auf eine analoge erweiterte Formel (63) zu kommen, müssen wir das inhomogene und — nach Trennung der nichts Neues liefernden Glieder mit a von denen mit a^2 — lineare Gleichungssystem, das sich aus (72) ergibt, auflösen. Bei der ersten Näherung liegen nun die Verhältnisse in Bezug auf eine direkte Methode in der Tat so einfach, weil dieses Gleichungssystem schon in aufgelöster Form dasteht. Das ist aber, wie ein Blick auf (75) lehrt, in der zweiten Näherung keineswegs der Fall, man muß die Auflösungsformeln (Bildung von Unterdeterminanten) anwenden. Bei der genannten Durchrechnung, die der Verfasser ausgeführt hat, erwiesen sich die Formeln als schwerfälliger und unbequemer als im allgemeinen Falle, wo in der Transformation nur eine Funktion steht und die g_{ik} nicht spezialisiert sind. Daran liegt es auch, daß die Näherungsgleichungen in zweiter Näherung in gewisser Hinsicht schon komplizierter sind als die allgemeine Riemannsche Krümmung. Ich leite daher im folgenden kurz die allgemeine Formel her, die (63) entspricht, und die man in der Literatur als „Christoffelsche Formel" zitiert findet, und gewinne die gegenüber (63) erweiterte Formel der zweiten Näherung durch Spezialisierung derselben.

Die Transformationsformel des Tensors g_{ik} lautet gemäß (34)

$$(76)\qquad \overline{g}_{ab} = g_{ik}\frac{\partial f^i}{\partial \overline{w}^a} \cdot \frac{\partial f^k}{\partial \overline{w}^b}.$$

Davon bilden wir die erste Ableitung

$$(77)\qquad \frac{\partial \overline{g}_{ab}}{\partial \overline{w}^c} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial w^r} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial \overline{w}^a}\frac{\partial f^k}{\partial \overline{w}^b} \cdot \frac{\partial f^r}{\partial \overline{w}^c} + g_{ik}\left(\frac{\partial^2 f^i}{\partial \overline{w}^a \partial \overline{w}^c}\frac{\partial f^k}{\partial \overline{w}^b} + \frac{\partial^2 f^i}{\partial \overline{w}^b \partial \overline{w}^c} \cdot \frac{\partial f^k}{\partial \overline{w}^a}\right),$$

wobei wir noch im letzten Term der Klammer die Summationsindizes i, k vertauscht haben. Um (77) auf eine bequemere Form zu bringen, vertauschen wir zunächst b mit c und in der ersten Summe k und r, dann schreiben wir diese Formel unter Vertauschung von a und b und i und k in der ersten Summe an und bilden den bekannten Ausdruck, indem wir die beiden so erhaltenen letzten Formeln addieren, davon (77) subtrahieren und durch 2 dividieren, so entsteht im allgemeinen Falle die Analogie zu (75)

$$\overline{\begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial \overline{w}^a} \frac{\partial f^k}{\partial \overline{w}^b} \frac{\partial f^r}{\partial \overline{w}^c} + g_{ik} \frac{\partial f^k}{\partial \overline{w}^c} \frac{\partial^2 f^i}{\partial \overline{w}^a \partial \overline{w}^b} \quad . \tag{78}$$

Diese $\frac{n^2 \, (n+1)}{2}$ Gleichungen zerfallen in $\frac{n\,(n+1)}{2}$ Systeme von je n Gleichungen, d. h., wenn wir a und b festhalten und i die Zahlen $1 \ldots n$ durchlaufen lassen, haben wir n Gleichungen für die n Unbekannten.

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial \overline{w}^a \partial \overline{w}^b} \; (i = 1, 2, \ldots n) \quad .$$

Diese Gleichungen sind linear und inhomogen, also unlösbar, wenn ihre Determinante von Null verschieden ist. Die Determinante ist gegeben durch

$$\left| g_{ik} \frac{\partial f^k}{\partial \overline{w}^c} \right| = \left| g_{ik} \right| \left| \frac{\partial f^k}{\partial \overline{w}^c} \right| = | g_{ik} | \cdot \triangle \quad , \tag{79}$$

c = Zeilenindex
i = Spaltenindex
$\triangle$ = Funktionaldeterminante der Transformation.

$\triangle$ ist von Null verschieden vorausgesetzt, $|g_{ik}|$ ist aber auch von Null verschieden, denn die g_{ik} können als Unbestimmte betrachtet werden. Die Determinante des Systems (78) verschwindet also nicht, und wir können dasselbe auflösen. Durch rein algebraische Bildung von Unterdeterminanten könnte dieses successive geschehen.

Wir wählen einen anderen Weg, der schneller zum Ziele führt. Bekanntlich ist

$$g_{ir} \, g^{rk} = \delta_i^k \tag{39*}$$

der gemischte Tensor, dessen Elemente gleich 1 sind für

$i = k$ und gleich 0 für $i \neq k$. Um nun in unserem System eine solche Determinante δ_i^k zu erhalten, multiplizieren wir mit g^{rt} und ersetzen in der zweiten Summe von (78) den Summationsbuchstaben k durch r. Wir beachten ferner folgendes. Die Unterdeterminanten g^{rt} transformieren sich wie $d\mathfrak{w}^r\, d\mathfrak{w}^t$. Es ist also

$$g^{rt} = \bar{g}^{cs} \frac{\partial f^r}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^c} \frac{\partial f^t}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^s} \qquad (80)$$

Ersichtlich haben wir (78) beiderseits nur mit $\bar{g}^{cs} \dfrac{\partial f^t}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^s}$ zu multiplizieren und erhalten — wenn gleich nach c und s summiert wird —

$$\overline{\begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix}}\, \bar{g}^{cs} \frac{\partial f^t}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^s} = \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^a} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^b} g^{rt} + g_{ir}\, g^{rt} \frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^a \partial \bar{\mathfrak{w}}^b} \qquad (81)$$

$$= \begin{bmatrix} ik \\ r \end{bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^a} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^b} g^{rt} + \frac{\partial^2 f^t}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^a \partial \bar{\mathfrak{w}}^b},$$

oder unter Einführung der bekannten Cristoffelschen Symbole zweiter Art

$$\overline{\begin{Bmatrix} ab \\ s \end{Bmatrix}} \frac{\partial f^t}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^s} = \begin{Bmatrix} ik \\ t \end{Bmatrix} \frac{\partial f^i}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^a} \frac{\partial f^k}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^b} + \frac{\partial^2 f^t}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^a \partial \bar{\mathfrak{w}}^b} \qquad (82)$$

Nun spezialisieren wir im Sinne von (38). Dann geht (82) über in unsere gewünschte Formel der zweiten Näherung

$$\alpha \frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^a \partial \bar{\mathfrak{w}}^b} + \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi^t}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^a \partial \bar{\mathfrak{w}}^b} = \alpha \left(\overline{\begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}}_h - \begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}_h \right) + \qquad (83)$$

$$+ \alpha^2 \left(\overline{\begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}}_{h^*} - \begin{bmatrix} ab \\ t \end{bmatrix}_{h^*} + \overline{\begin{Bmatrix} ab \\ t \end{Bmatrix}}_h - \begin{Bmatrix} ab \\ t \end{Bmatrix}_h + \overline{\begin{bmatrix} ab \\ s \end{bmatrix}}_h \frac{\partial \varphi^t}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^s} - \right.$$

$$\left. - \begin{bmatrix} ib \\ t \end{bmatrix}_h \frac{\partial \varphi^i}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^a} - \begin{bmatrix} ak \\ t \end{bmatrix}_h \cdot \frac{\partial \varphi^k}{\partial \bar{\mathfrak{w}}^b} \right).$$

Die weitere Eliminationsrechnung verläuft genauso wie im Bereiche modulo α^2. Dazu differenzieren wir (83):

$$(84)\quad a\frac{\partial^3\varphi^t}{\partial\overline{w}^a\,\partial\overline{w}^b\,\partial\overline{w}^c}-a^2\frac{\partial^3\psi^t}{\partial\overline{w}^a\,\partial\overline{w}^b\,\partial\overline{w}^c}=a\left(\frac{\partial}{\partial\overline{w}^c}\overline{\left[{ab\atop t}\right]}_h-\frac{\partial}{\partial\overline{w}^c}\left[{ab\atop t}\right]_h\right)-a^2\left(\frac{\partial}{\partial w^r}\left[{ab\atop t}\right]_h\frac{\partial\varphi^r}{\partial\overline{w}^c}-\frac{\partial}{\partial\overline{w}^c}\overline{\left[{ab\atop t}\right]}_{h^*}\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial\overline{w}^c}\left[{ab\atop t}\right]_{h^*}-\frac{\partial}{\partial\overline{w}^c}\overline{\left\{{ab\atop t}\right\}}_h+\frac{\partial}{\partial w^c}\left\{{ab\atop t}\right\}_h-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\overline{w}^c}\overline{\left[{ab\atop s}\right]}_h\frac{\partial\varphi^t}{\partial\overline{w}^s}-\overline{\left[{ab\atop s}\right]}_h\frac{\partial^2\varphi^t}{\partial\overline{w}^s\,\partial\overline{w}^c}+\frac{\partial}{\partial w^c}\left[{ib\atop t}\right]_h\frac{\partial\varphi^i}{\partial\overline{w}^a}$$

$$+\left[{ib\atop t}\right]_h\frac{\partial^2\varphi^i}{\partial\overline{w}^a\,\partial\overline{w}^c}+\frac{\partial}{\partial w^c}\left[{ak\atop t}\right]_h\frac{\partial\varphi^k}{\partial\overline{w}^b}+$$

$$\left.+\left[{ak\atop t}\right]_h\frac{\partial^2\varphi^k}{\partial\overline{w}^a\,\partial\overline{w}^c}\right).$$

Nun trennen wir die Glieder mit a von denen mit a^2, da sie nichts Neues liefern, haben sie aber wieder im Endresultat hinzuzufügen. Setzen wir jetzt

$$(85)\quad a^2\frac{\partial^3\varphi^t}{\partial\overline{w}^a\,\partial\overline{w}^b\,\partial\overline{w}^c}=a^2\frac{\partial^3\psi^t}{\partial\overline{w}^c\,\partial\overline{w}^b\,\partial\overline{w}^a},$$

so geben die diesbezüglichen rechten Seiten von (84), die keine Glieder mit a mehr enthalten, wenn wir noch die zweiten Ableitungen von φ durch (63) ausdrücken, eine Beziehung, die ausgeführt folgendermaßen lautet

$$(86)\quad a^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial\overline{w}^c}\overline{\left[{ab\atop s}\right]}_h-\frac{\partial}{\partial\overline{w}^b}\overline{\left[{ac\atop s}\right]}_h\right)\frac{\partial\varphi^t}{\partial\overline{w}^s}+\frac{\partial}{\partial\overline{w}^c}\overline{\left\{{ab\atop t}\right\}}_h-\right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial\overline{w}^b}\overline{\left\{{ac\atop t}\right\}}_h+\frac{\partial}{\partial\overline{w}^c}\overline{\left[{ab\atop t}\right]}_{h^*}-\frac{\partial}{\partial\overline{w}^b}\overline{\left[{ac\atop t}\right]}_{h^*}+$$

$$\left.+\overline{\left[{ab\atop l}\right]}_h\overline{\left[{lc\atop s}\right]}_h-\overline{\left[{ac\atop l}\right]}_h\overline{\left[{lb\atop t}\right]}_h\right]=a^2\left[\left(\frac{\partial}{\partial w^c}\left[{ib\atop t}\right]_h\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial w^b}\left[{ic\atop t}\right]_h\right)\frac{\partial\varphi^i}{\partial\overline{w}^a}+\left(\frac{\partial}{\partial w^c}\left[{ak\atop t}\right]_h-\frac{\partial}{\partial w^k}\left[{ac\atop t}\right]_h\right)\frac{\partial\varphi^k}{\partial\overline{w}^b}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial w^r}\left[{ab\atop t}\right]_h-\frac{\partial}{\partial w^b}\left[{ar\atop t}\right]_h\right)\frac{\partial\varphi^r}{\partial\overline{w}^c}+\frac{\partial}{\partial w^c}\left\{{ab\atop t}\right\}_h$$

$$-\frac{\partial}{\partial w^b}\left\{{ac\atop t}\right\}_h+\frac{\partial}{\partial w^c}\left[{ab\atop t}\right]_{h^*}-\frac{\partial}{\partial w^b}\left[{ac\atop t}\right]_{h^*}$$

$$\left.+\left[{cp\atop t}\right]_h\left[{ab\atop p}\right]_h-\left[{bp\atop t}\right]_h\left[{ac\atop p}\right]_h\right].$$

Nimmt man noch die aus der ersten Näherung bekannten Terme mit α zu (86) hinzu, so ist das Gesamteliminationsresultat modulo α^3 in der Tat die Transformationsgleichung für den gemischten Tensor vierter Stufe modulo a^3:

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial w^l}\begin{bmatrix}km\\j\end{bmatrix}_h - \frac{\partial}{\partial w^m}\begin{bmatrix}kl\\j\end{bmatrix}_h\right) + \alpha^2\left[\frac{\partial}{\partial w^l}\begin{Bmatrix}km\\j\end{Bmatrix}_h - \right. \tag{87}$$

$$- \frac{\partial}{\partial w^m}\begin{Bmatrix}kl\\j\end{Bmatrix}_h + \frac{\partial}{\partial w^l}\begin{bmatrix}km\\j\end{bmatrix}_{h^*} - \frac{\partial}{\partial w^m}\begin{bmatrix}kl\\j\end{bmatrix}_{h^*} +$$

$$\left. + \begin{bmatrix}ln\\j\end{bmatrix}_h \begin{bmatrix}km\\n\end{bmatrix}_h - \begin{bmatrix}mn\\j\end{bmatrix}_h \begin{bmatrix}kl\\n\end{bmatrix}_h\right] = R^{\,i}_{klm} \text{ modulo } \alpha^3.$$

Den übersichtlichen Vergleich leistet Formel (47). Wir haben somit die **einzig mögliche** Schar Tensoren modulo a^3 verlangter Bauart vor uns

(88) R^i_{klm} modulo α^3 $+ \lambda$ mal einem aus den $g_{ik} = \delta_{ik} + a\, h_{ik} + \alpha^2 h^*_{ik}$ gebildeten Tensor vierter Stufe.

Die Elimination der dritten Ableitungen der Transformationsfunktionen φ und ψ war so eingerichtet (vergl. die Formeln (75), (83) und (84), daß sie sich nur auf eine einzige Weise ausführen ließ. An dieser Stelle kann ich die im Falle A bekanntlich noch vorhandene Vieldeutigkeit einschränken, indem ich auf Grund der Eindeutigkeit der zweiten Näherung als konsequenter Fortsetzung der ersten, letztere, also (71) eindeutig „normiere".

Mein Eindeutigkeitsbeweis enthält — wie der aufmerksame Leser leicht bemerken wird — implizit folgenden Hilfssatz: „Alle Tensoren modulo α^2 bzw. modulo α^3 sind durch Elimination der Transformationsgrößen aus den Transformationsgleichungen erzeugbar". Im folgenden Paragraphen teile ich einen m. W. neuen Beweis für diesen Satz mit, den ich auf Differentialkovarianten ausdehne, die die Tensoren in sich einschließen.

§ 2. Beweis der Eindeutigkeit des Eliminationsverfahrens in der Theorie der algebraischen und Differentialinvarianten.

Satz: Jede Differentialinvariante (bezw. Differentialkovariante) eines Grundformsystems entsteht durch Elimination der Transformationsgrößen aus den Transformationsgleichungen.

Ich führe den Beweis so, daß ich zuerst den Satz für den Fall projektiver Invarianten (bezw. Kovarianten) verifiziere und dann die Übertragung auf Differentialinvarianten (bezw. Kovarianten) vornehme.

A. Beweis im projektiven Falle.

Es sei

(89) $$x_i = s_{i\alpha}\,\overline{x}_\alpha$$

das Transformationsgesetz für die Veriabeln x_i. Ferner sei das Transformationsgesetz für die Koeffizenten $a_{i_1}, \ldots_{i_r}$ einer Grundform gegeben durch

(90) $$\overline{a}_{\alpha_1 \ldots \alpha r} = S\,(a_{i_1 \ldots i_r}, s_{i\alpha}) \quad .$$

Dabei sind die Transformationsgleichungen linear in den a. Ebenso sei eine zweite Grundform mit den Koeffizienten $b_{j_1} \ldots _{js}$ und dem Transformationsgesetz

(91) $$\overline{b}_{\beta_1 \ldots \beta s} = T\,(b_{j_1 \ldots js}, s_{j\beta})$$

zu Grunde gelegt. Eine absolute Invariante ist dann definiert durch

(92) $$J\,(a_{i_1 \ldots i_r}, b_{j_1 \ldots js}) = J\,(\overline{a}_{\alpha_1 \ldots \alpha r}, \overline{b}_{\beta_1 \ldots \beta s})$$

Diese Identität ist eine Relation, die eine Folge der Transformationsgleichungen ist und die Transformationsgrößen s nicht mehr enthält. Wir können nun die Definitionsgleichung schreiben

(92*) $$J\,(a, b) - J\,(\overline{a}, \overline{b}) = 0$$

für
$$\overline{a} = S\,(a)$$
$$\overline{b} = T\,(b) \quad .$$

Um nun formal zu zeigen, daß sie durch Elimination entstanden ist, zeigen wir, daß sie sich als lineare Kombination von

$$\bar{a} - S(a) = 0 \qquad (93)$$
$$\bar{b} - T(a) = 0$$

schreiben läßt. Wir benutzen dazu folgenden Hilfssatz (der Algebra): „Ist $f(x_1 \, . \, . \, x_n)$ ein Polynom, welches für die Werte

$$x_1 = a_1 \; . \; . \; . \; x_n = a_n$$

verschwindet, also

$$f(a_1 \; . \; . \; a_n) = 0 \quad ,$$

dann ist f eine lineare Kombination von

$$(x_1 - a_1) \; . \; . \; . \; (x_n - a_n) \quad .$$

Mit anderen Worten: das Polynom hat die Form

$$f(x_1, \ldots x_n) = A_1 (x_1 - a_1) + A_2 (x_2 - a_2) + \ldots + A_n (x_n - a_n) = \sum_i A_i (x) - (x_i - a_i) \quad , \qquad (94)$$

wo die A_i ganze rationale Funktionen von $x_1 \ldots . x_n$ sind."

Ist f ein Polynom einer einzigen Variablen, so geht dieser Satz über in den bekannten Satz der Algebra

$$f(x) = f_1(x) (x - a)$$

Beweis: Man setze $\quad y_i = x_i - a_i$

(95) d. h. $\quad x_i = y_i + a_i$

Dadurch geht $f(x)$ über in eine Funktion $g(y)$, die gleichen Grad wie f hat. Wir entwickeln nach steigenden Potenzen von y, etwa so

$$f(x) = g(y) = c_o + \sum_i c_i y_i + \sum_{ik} c_{ik} y_i y_k + \ldots \qquad (96)$$

oder anders geschrieben

$$f(x) = g(y) = A_o + A_1 y_1 + \ldots + A_n y_n = A_o + \sum_i A_i (y) y_i \quad , \qquad (97)$$

wo $A_o = c_o$. Diese Darstellung ist mehrdeutig, was aber nichts ausmacht. Nun verschwindet nach Voraussetzung

$$f(x) \qquad \text{für } x_i = a_i \quad ,$$

d. h. $\qquad g(y)$ für $y_1 \ldots y_n = 0 \quad .$

Daraus folgt

(98) $$c_0 = A_0 = 0 \quad .$$

also ist

(99) $$f(x) = g(y) = \sum_i A_i(y)\, y_i = \sum_i B_i(x)\,(x_i - a_i) \quad ,$$

wo die B_i Polynome in x_k und a_k sind. W. z. b. w.

Nach Defination ist

(92*) $$J(\overline{a}, \overline{b}) - J(a, b) = 0$$

für
$$\overline{a} = S(a)$$
$$\overline{b} = T(b) \quad .$$

J kann eine ganze oder gebrochene Invariante sein. Im letzteren Falle folgt aus

(100) $$J = \frac{J_1}{J_2}$$

(101) $$\overline{J_1}\,(J_2 - \overline{J_2}) - \overline{J_2}\,(J_1 - \overline{J_1}) = 0 \quad .$$

Den Ausdruck (92*) fassen wir als Polynom in den $\overline{a}, \overline{b}$ auf. Die a, b sollen dem Koeffizentenbereich angehören, dann wissen wir, daß wegen (92*) gilt

(102) $$„J(\overline{a}, \overline{b}) - J(a, b)“ = \sum_i A_i(a, \overline{a}, b, \overline{b}, S, T)\,\big(\overline{a_i} - S_i(a)\big) +$$
$$+ \sum_j B_j(a, \overline{a}, b, \overline{b}, S, T)\,\big(\overline{b_j} - T_j(b)\big) \quad .$$

D. h. die Eigenschaft daß J eine Invariante ist, läßt sich formal so ausdrücken:

$$„J(\overline{a}, \overline{b}) - J(a, b)“$$

läßt sich darstellen als lineare Kombination von

$$\overline{a} - S(a)$$
$$\overline{b} - T(b)$$

mit Koeffizenten, die ganze Funktionen von $a, \overline{a}, b, \overline{b}$ sind und zwar so, daß sie die Transformationsgrößen nur in den Verbindungen S und T enthalten. Die in den Koeffizienten A_j, B_j enthaltenen S bezw. T können wir aber weiter durch die a, b und durch die Transformationsgrößen s_{ik} (i,k = beliebige Indizes) ausdrücken, sobald wir

(103)
$$S(a) = S(a, s_{ik})$$
$$T(b) = T(b, s_{ik})$$

einsetzen. Wenn also

(104)
$$\bar{a} - S(a) = 0$$
$$\bar{b} - T(b) = 0$$

besteht, ist offenbar auch (92*) erfüllt wegen der Darstellung (102). Dieser neue Ausdruck enthält aber die Transformationsgrößen nicht mehr, und das nennt man Eliminationsresultat aus (103). Damit ist bewiesen, daß die gewöhnlichen projektiven Invarianten durch Elimination der Transformationsgrößen aus den Transformationsgleichungen entstehen.

Für die Kovarianten $K(a, b, x)$, welche also ausser den Koeffizienten a, b noch die Variabeln x enthalten, gilt ganz das Gleiche. Man muß nur die Transformation (89) umkehren zu

(89*)
$$\bar{x} = R(x, s_{ik})$$

und dann (101) entsprechend verallgemeinern. Ich setze die Formel hierher.

(102*)
$$K(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}) - K(a, b, x) =$$
$$= \sum A(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, a, b, x, R, S, T)\big(\bar{a} - S(a)\big) +$$
$$\sum B(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, a, b, x, R, S, T)\big(\bar{b} - T(b)\big) +$$
$$\sum C(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, a, b, x, R, S, T)\big(\bar{x} - R(x)\big)$$

Drückt man dann alle R, S, T durch a, b, x, s_{ik} aus, so hat man dadurch das Eliminationsresultat vor sich.

Es sei noch ein Satz angemerkt, der sich als Umkehrung aus dem eben Bewiesenen ergibt. Nehmen wir die Gesamtheit aller Eliminationsresultate, die die Transformationsgrößen nicht mehr enthalten, so sind das Ausdrücke von der Form

(105)
$$J(\bar{a}, \bar{b}, a, b) = 0$$

bzw.

(105*)
$$K(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}, a, b, x) = 0$$

Als Invarianten bezw. Kovarianten können wir speziell solche Eliminationsresultate bezeichnen, welche die Form haben

(92*) $$J(\bar{a}, \bar{b}) - J(a, b) = 0$$

bzw.

(92**) $$K(\bar{a}, \bar{b}, \bar{x}) - K(a, b, x) = 0 \quad ,$$

und da umgekehrt jede Invariante bzw. Kovariante durch Elimination entsteht, so gilt der Satz: Man erhält alle projektiven Invarianten (92*) bzw. Kovarianten (92**), indem man aus der Gesamtheit der Eliminationsresultate (105) bzw. (105*) diejenigen aufsucht, welche die Form (92*) bzw. (92**) haben.

B. Übertragung auf Differentialinvarianten (-kovarianten.)

Wir ziehen nur solche Invarianten (bzw. Kovarianten) in Betracht, welche die g_{ik} und ihre Ableitungen allein enthalten. In den Ableitungen gehen wir bis zur r-ten Ordnung, für uns kommt nur $r = 2$ in Betracht. Die Transformationen denken wir uns als beliebige Punkttransformationen gegeben, jedoch bleiben unsere Überlegungen auch bei Beschränkung auf unendlichkleine Transformationen modulo α^2 oder einer beliebigen p-ten Potenz von α richtig. Das Transformationsgesetz der g_{ik} und ihrer Ableitungen bis zur r-ten Ordnung lautet in abgekürzter Schreibweise

(106) $$\bar{g}_{ab} = S\left(g_{ik}, \frac{\partial f^i}{\partial \bar{x}^a}\right)$$

$$\frac{\partial \bar{g}_{ab}}{\partial \bar{x}^c} = S_1\left(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}, \frac{\partial f^i}{\partial \bar{x}^a}, \frac{\partial^2 f^i}{\partial \bar{x}^a \partial \bar{x}^b}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^r \bar{g}_{ab}}{\partial \bar{x}^{c_1} \ldots \partial^{c_r}} = S_r(\ldots)$$

Nun ist alles wie im projektiven Falle. Wir haben in den Transformationsgleichungen mehr Transformationsgrößen, die wir eliminieren müssen. Die Definition der Invariante lautet analog (92*) jetzt:

(107) $$J\left(\bar{g}_{ab}, \ldots \frac{\partial^r \bar{g}_{ab}}{\partial x^{c_1} \ldots \partial x^{c_r}}\right) = J\left(g_{ik}, \ldots \frac{\partial^r g_{ik}}{\partial x^{c_1} \ldots \partial x^{c_r}}\right)$$

Eine solche Relation ist identisch erfüllt in den g_{ik} und ihren Ableitungen vermöge der Transformationsgleichungen (106). Fassen wir die gestrichenen Größen

$$\bar{g}_{ab} \dots \frac{\partial^r \bar{g}_{ab}}{\partial \bar{x}^{c_1} \dots \partial \bar{x}^{c_r}}$$

als Variable, die ungestrichenen

$$g_{ik} \dots \frac{\partial^r g_{ik}}{\partial x^{l_1} \dots \partial x^{l_r}}$$

als zum Koeffizientenbereich gehörig auf, dann ist analog (102)

$$(108)\quad J\left(\bar{g}_{ab}, \dots \frac{\partial^r \bar{g}_{ab}}{\partial \bar{x}^{c_1} \dots \partial \bar{x}^{c_r}}\right) - J\left(g_{ik}, \dots \frac{\partial^r g_{ik}}{\partial x^{l_1} \dots \partial x^{l_r}}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{c \\ s \leqq r}} A_{c_1 \dots c_s} \left(\frac{\partial^s \bar{g}_{ab}}{\partial \bar{x}^{c_1} \dots \partial \bar{x}^{c_s}} - S_{s_1\, c_1 \dots c_s}(g)\right) \qquad ,$$

d. h.

$$(107^*)\quad J\left(\bar{g}_{ab}, \dots \frac{\partial^r \bar{g}_{ab}}{\partial \bar{x}^{c_1} \dots \partial \bar{x}^{c_r}}\right) - J\left(g_{ik}, \dots \frac{\partial^r g_{ik}}{\partial x^{l_1} \dots \partial x^{l_r}}\right) = 0$$

ist ein Eliminationsresultat, w. z. b. w.

Die Erweiterung dieses Ergebnisses auf Differentialkovarianten ist nun, insbesondere nach den Ausführungen im projektiven Fall, so durchsichtig, daß das Anschreiben der diesbzgl. zu erweiternden Formeln (107) und (108) nicht notwendig ist.

Schlußbemerkung.

1. Die für gemischte Tensoren vierter Stufe ausgesprochenen Resultate übertragen sich unmittelbar auf Tensoren zweiter Stufe verlangter Bauart, die aus ersteren durch den Prozess der sogenannten Verjüngung hervorgehen. v. Laue hat nämlich in der Neuauflage des zweiten Bandes seines Werkes über die Relativitätstheorie den wichtigen Satz allgemein bewiesen, daß die Verjüngung der einzige Weg ist, durch lineare Kombination der Komponenten eines Tensors von n-ter zu einem Tensor von (n-2)-ter Stufe zu gelangen. Aus historischen Gründen muß hier bemerkt werden, daß E. Noether-Göttingen vor einer Reihe von Jahren einen exakten Beweis für die Einzigartigkeit des Verjüngerungsprozesses gefunden, aber diesen wegen der Kompliziertheit der Rechnungen nicht veröffentlicht hat. Die Entwicklungen von E. Noether, die sich auf den Riemannschen Krümmungsskalar beziehen, lassen sich — nach einer Mitteilung von ihr — so kennzeichnen. Zum Beweise der Einzigkeit des Riemannschen Krümmungsskalar wird ein weiter Weg über den fundamentalen Satz, daß sich jedes Problem der Theorie der Differentialinvarianten auf projektive Invarianten reduziert, benutzt. Der Krümmungsskalar bestimmt sich als Simultaninvariante aus R^{i}_{klm} und g_{ik}. Da die Untersuchung im algebraischen Gebiete verläuft, ist es möglich, für den gesuchten Ausdruck symbolische Schreibweise anzuwenden, und das führt nach umständlicher Rechnung zu dem Ergebnis, daß gerade nur diejenige absolute Invariante spezieller Bauart existiert, die sich durch doppelte Verjüngung aus R^{j}_{klm} ableitet. Etwas Ähnliches ließe sich natürlich für einfache Verjüngung beim Tensor R_{kl} durchführen.

Da nun die durch Verjüngung von (71) hervorgehenden Ausdrücke den im zweiten Teil hergeleiteten (58) identisch sind, so sind damit letztere normiert eindeutig. Für die sich ergebenden Möglichkeiten, unter den vier verschiedenen Indizes je zwei derselben gleichzusetzen und über einen derselben zu summerieren, gilt hier ebenso meine frühere Bemerkung.

2. Die Quasi-Nichteindeutigkeit der ersten Näherung ist eine charakterische Eigenschaft der angewandten α-Entwicklung, denn aus ihr folgt, daß in erster Näherung Tensor und Invariante dieselbe Bedeutung haben.

3. Die rechnerische Schwierigkeit bei der Tensorbildung modulo α^3 liegt daran, daß in zweiter Näherung sowohl die Transformationsgleichungen als auch die Elimination der Transformationsgrößen den Charakter der allgemeinen Riemannschen Krümmung haben. Es folgt, daß es auf dem Wege schrittweiser Näherungen — sofern man die zweite Näherung noch unbedingt gebraucht — unmöglich sein wird, einen einfacheren Prozess der Aufstellung von Näherungsfeldgleichungen anzugeben, als ihn die allgemeine Krümmungstheorie darstellt. So gibt die im Anschluß an die eingangs zitierte Bemerkung von Einstein durchgeführte Untersuchung der Gravitationsgleichungen eine vollständige Übersicht über ihre Struktur.

Osnabrück, am 30. August 1931.

Zeitschrift/Journal: Veröffentlichungen des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Osnabrück

Jahr/Year: 1932

Band/Volume: 22

Autor(en)/Author(s): Bokowski Adalbert

Artikel/Article: Strukturfragen in der Theorie der allgemein-invarianten Gravitationsgleichungen 73-114