5. Ueber den Zusammenhang der geometrischen Gesetze der Krystallographie.

Von Herrn Th. Liebisch in Berlin.

Das System derjenigen Ebenen und Geraden im Raume, welche mögliche Flächen und Kanten einer Krystallgattung sind, wird, geometrisch betrachtet, von drei Gesetzen beherrscht, von dem Gesetz der constanten Neigungswinkel, von dem Gesetz der rationalen Indices oder dem ihm äquivalenten Gesetz der Zonen und von dem Gesetz der Symmetrie. Hieran schliessen sich als nothwendige Ergänzungen diejenigen Gesetze, welche aussagen, dass die beiden zuletzt genannten Gesetze unabhängig von der Temperatur sind, nämlich einerseits die Gesetze der Erhaltung der rationalen Indices, der Zonen und des anharmonischen Verhältnisses tautozonaler Flächen und andererseits das Gesetz der Erhaltung der Krystallsysteme. In Bezug auf die ausführliche Darstellung dieser Gesetze wird auf die trefflichen und allgemein verbreiteten Lehrbücher der Krystallographie, welche wir V. v. Lang, P. Groth und C. Klein verdanken, verwiesen. Es sollen hier einige Bemerkungen mitgetheilt werden, welche den Versuch enthalten, den Zusammenhang zwischen den angeführten Gesetzen genau zu bezeichnen.

1. Gesetz der constanten Neigungswinkel.

„Für eine bestimmte Temperatur ist nur die relative, nicht die absolute Lage der Ebenen und Geraden, welche mögliche Flächen und Kanten einer Krystallgattung sind, constant.“

Flächen und Kanten sind also nur ihrer Richtung nach völlig bestimmt, oder m. a. W. nur die Neigungswinkel der Flächen und Kanten sind, so lange die Temperatur nicht verändert wird, constant. Die Richtung einer Ebene (Geraden) im Raume wird schon durch zwei von einander unabhängige Grössen eindeutig festgesetzt, z. B. durch die beiden Winkel, welche die Ebene (Gerade) mit zwei ihrer Richtung nach gegebenen Ebenen (Geraden) einschliesst. Es sind also in einer

Krystallgattung nur doppelt unendlich viele Flächen und Kanten möglich. Demnach kann das Gesetz in Rede auch so ausgesprochen werden:

„Die in einer Krystallgattung möglichen Flächen und Kanten bilden für jede bestimmte Temperatur eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit."

Stellt man sich vor, dass diese Flächen und Kanten durch einen und denselben Punkt im Raume gelegt werden, so bilden sie ein Ebenen- und ein Geradenbündel. Auf dieses Bündel bezieht sich die geometrische Betrachtung der Krystalle, weil es alle zwischen den Flächen und Kanten einer Krystallgattung bestehenden Beziehungen enthält. Zur Aufsuchung dieser Beziehungen würde sich die behufs Erläuterung des ersten Gesetzes beispielsweise angeführte Bestimmungsmethode als ungeeignet erweisen. Die Geometrie des Raumes bietet aber andere Hilfsmittel dar, welche nothwendig und ausreichend sind, um die geometrischen Verhältnisse der Krystalle auf ein so einfaches Grundgesetz, wie es dasjenige der rationalen Indices oder der Zonen ist, zurückzuführen. Indem die Schöpfer der Krystallographie, Hauy und Chr. S. Weiss, sich gewisser Bestimmungsmethoden der Raumgeometrie bedienten, erkannten sie, dass man den einfachsten Ausdruck für das Band, welches Flächen und Kanten einer Krystallgattung in Bezug auf ihre gegenseitige Lage verknüpft, erst dann gewinnt, wenn man die Lage aller Flächen und Kanten mit der Lage von irgend vier Flächen (beziehungsweise Kanten) unter ihnen vergleicht. Die aus einer theoretisch möglichen doppelten Mannigfaltigkeit zu wählenden vier Flächen (Kanten) unterliegen der Bedingung, dass sie nicht zu je dreien einer Geraden (Ebene) parallel seien. — Indem ich jetzt das Gesetz der rationalen Indices und das Gesetz der Zonen formulire, bediene ich mich der von F. A. Möbius in seiner Abhandlung über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle*) glücklich gewählten Bezeichnungen, welche dem Anscheine nach in die krystallographische Literatur keinen Eingang gefunden haben.

2. Gesetz der rationalen Indices und Gesetz der Zonen.

Es seien drei nicht einer und derselben Geraden parallele Ebenen gegeben, welche sich in dem Punkte O schneiden und die Durchschnittslinien Ox_1, Ox_2, Ox_3 erzeugen. Eine

*) Ber. Verhandl. d. sächs. Ges. d. Wissensch. 1849. Math.-phys. Cl. pag. 65 ff.

vierte Ebene bestimme auf diesen Durchschnittslinien Abschnitte, welche sich verhalten wie die Längen:

$$OA_1 : OA_2 : OA_3.$$

Eine fünfte Ebene bestimme Abschnitte, welche sich wie die Längen:

$$OH_1 : OH_2 : OH_3$$

verhalten. Man bilde die drei Verhältnisse:

$$\frac{OA_1}{OH_1} : \frac{OA_2}{OH_2} : \frac{OA_3}{OH_3}$$

Wenn nun die beiden zwischen diesen drei Verhältnissen bestehenden Verhältnisse rationale Zahlen, die Null mit einbegriffen, sind, so nennt Möbius die fünfte Ebene aus den vier ersteren Ebenen arithmetisch ableitbar. Setzt man

$$\frac{OA_1}{OH_1} : \frac{OA_2}{OH_2} : \frac{OA_3}{OH_3} = h_1 : h_2 : h_3$$

so heissen die rationalen Zahlen h_1, h_2, h_3 bekanntlich die Indices der Fläche, welche die Abschnitte OH_1, OH_2, OH_3 bestimmt. Das Gesetz der rationalen Indices lautet nun:

„Das System der in einer Krystallgattung möglichen Flächen und Kanten ist so beschaffen, dass aus je vier Flächen (Kanten*)) die jedesmal übrigen Flächen und Kanten **arithmetisch** abgeleitet werden können.“

Es seien vier Ebenen, von denen nicht je drei einer und derselben Geraden parallel sein sollen, gegeben. Zu diesen Ebenen sollen andere Ebenen in der Weise hinzugefügt werden, dass jede neue Ebene mit zweien von den Durchschnittslinien der bereits vorhandenen Ebenen parallel laufe. Dann nennt Möbius jede dieser neuen Ebenen aus den vier ersteren Ebenen geometrisch ableitbar. Das Gesetz der Zonen ist mit Rücksicht hierauf wie folgt zu formuliren:

„Das System der in einer Krystallgattung möglichen Flächen und Kanten ist so beschaffen, dass aus je vier Flächen (Kanten) die jedesmal übrigen Flächen und Kanten **geometrisch** abgeleitet werden können.“

---

*) Da Flächen und Kanten sich dualistisch gegenüberstehen, so kann man, was von den Flächen gilt, auch von den Kanten aussagen.

Für die Darlegung des Zusammenhanges zwischen dem Gesetz der rationalen Indices und dem Gesetz der Zonen bedürfen wir einer Bestimmungsmethode der Lage einer Fläche und einer Kante. Da unsere beiden Gesetze eine Eigenschaft von je fünf Flächen (Kanten) aussagen, nämlich von vier willkürlich aber fest gewählten und der Bestimmung zu Grunde liegenden Flächen (Kanten) und ausserdem von einer der übrig bleibenden Flächen (Kanten), so liegt die Aufforderung nahe, von der bekannten Fundamentalgleichung der räumlichen Goniometrie, welche zwischen den Cosinus der von fünf Ebenen (Geraden) eingeschlossenen Winkel besteht *), auszugehen:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \cos(45) & \cos(41) & \cos(42) & \cos(43) \\ \cos(15) & 1 & \cos(12) & \cos(13) \\ \cos(25) & \cos(21) & 1 & \cos(23) \\ \cos(35) & \cos(31) & \cos(32) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Es sollen 1, 2, ., ., 5 fünf Gerade bedeuten; und zwar seien 1, 2, 3 drei Kantenrichtungen eines asymmetrischen Krystalles. Ferner bedeute 4 die Normale einer Fläche (4) desselben Krystalls und 5 eine jener Fläche (4) parallele Kantenrichtung. In diesem Falle ist $\cos(45) = 0$. Ordnet man die vorstehende Determinante nach den Elementen der ersten Horizontalreihe und der ersten Verticalreihe, so erhält man:

$$(2) \qquad \sum_{i,k=1}^{3} \Delta_{ik} \cos(4i) \cos(4k) = 0$$

worin die Grössen Δ_{ik} die in A. pag. 136 angegebene Bedeutung haben. Nun bestehen nach A. Formel (43) die Relationen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \Delta_{1k} \cos(5k) &= \sqrt{\Delta} \, . \sin(23) \, . \cos(5\,\mathrm{I}) \\ \sum_{k=1}^{3} \Delta_{2k} \cos(5k) &= \sqrt{\Delta} \, . \sin(31) \, . \cos(5\,\mathrm{II}) \\ \sum_{k=1}^{3} \Delta_{3k} \cos(5k) &= \sqrt{\Delta} \, . \sin(12) \, . \cos(5\,\mathrm{III}) \end{aligned}$$

---

*) Vergl. Zur analytisch-geometrischen Behandlung der Krystallographie. In: Zeitschr. für Krystallographie Bd. I. 1877. pag. 142. — Der Kürze wegen soll diese Abhandlung hinfort mit A. bezeichnet werden.

Hierin bedeuten I, II, III die Normalen der Flächen, welche bezüglich parallel den Kantenrichtungen 2 und 3, 3 und 1, 1 und 2 liegen; und $\sqrt{\Delta}$ ist der räumliche Sinus der von den Kantenrichtungen 1, 2, 3 gebildeten Ecke. Mit Rücksicht auf (3) geht die Gleichung (2) über in:

$$\text{(4)} \quad \begin{gathered} \cos(41)\sin(23)\cos(5\,\mathrm{I}) + \cos(42)\sin(31)\cos(5\,\mathrm{II}) + \\ \cos(43)\sin(12)\cos(5\,\mathrm{III}) = 0. \end{gathered}$$

Halten wir die Normale 4 fest, und lassen wir die Gerade 5 alle Kantenrichtungen einnehmen, welche der Fläche (4) parallel laufen, so wird die Gleichung (4) stets erfüllt; d. h. die zuletzt erhaltene Gleichung ist die Gleichung der Fläche (4), wenn darin die Grössen $\cos(5\mathrm{I})$, $\cos(5\mathrm{II})$, $\cos(5\mathrm{III})$ als variabel angesehen werden. Unter Benutzung der Bezeichnungen:

$$\begin{gathered} \cos(41) = u_1, \quad \cos(42) = u_2, \quad \cos(43) = u_3 \\ \sin(23)\cos(5\mathrm{I}) = \xi_1, \quad \sin(31)\cos(5\mathrm{II}) = \xi_2, \\ \sin(12)\cos(5\,\mathrm{III}) = \xi_3 \end{gathered}$$

nimmt die Gleichung (4) die Form an:

$$\text{(5)} \qquad u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3 = 0.$$

Man kann die Grössen u_1, u_2, u_3 als die Coordinaten der betrachteten Fläche (4) und die veränderlichen Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 als die Coordinaten der veränderlichen Kantenrichtung 5 auffassen. — Umgekehrt kann man aber auch die Kantenrichtung 5 festhalten und die Normale 4 in der Weise variiren, dass sie successive auf allen der Kante 5 parallelen Flächen senkrecht steht. Auch dann bleibt die Gleichung (4) bestehen. Sie ist unter den jetzt geltenden Annahmen die Gleichung der Kante 5.

Die Gleichung (1) und die aus ihr abgeleiteten Gleichungen bestehen, welches auch die absolute Lage der fünf Ebenen (Geraden) im Raume sein möge. Dieser Umstand kommt darin zur Geltung, dass man in (5) die Grössen u_1, u_2, u_3 und ebenso die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 mit einem beliebigen Factor versehen kann, ohne dass die Gleichung (5) aufhört zu bestehen; d. h. die Coordinaten u_1, u_2, u_3 und ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind nur bis auf einen Proportionalitätsfactor bestimmt, oder m. a. W. nur die beiden Verhältnisse $u_1 : u_2 : u_3$, sowie die beiden Verhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ sind bestimmt. So gelangt das erste Gesetz zur analytischen Darstellung.

Die so eben angestellte Betrachtung zeigt, dass die Gleichung (5), welche in A. pag. 138—140 auf einem anderen Wege gewonnen wurde, ein specieller Fall der Fundamentalgleichung (1) der räumlichen Goniometrie ist. Diese letztere Gleichung kann zum Ausgangspunkt für die geometrische Behandlung der Krystalle gewählt werden, da sie die gemeinsame Quelle für die Lösungen der die rechnende Krystallographie beschäftigenden Aufgaben enthält.

Für krystallographische Zwecke scheint es geboten, als Coordinaten einer Fläche die mit u_1, u_2, u_3 bezeichneten Grössen und demzufolge als Coordinaten einer Kante die mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 bezeichneten Grössen zu wählen, da die u_1, u_2, u_3 sich direct mit den von Chr. S. Weiss eingeführten und allgemein üblichen Parametern vergleichen lassen. Es sind nämlich die Grössen u_1, u_2, u_3 den reciproken Werthen dieser Parameter proportional, vergl. A. pag. 141:

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{h_1}{a_1} : \frac{h_2}{a_2} : \frac{h_3}{a_3}$$

Hierin bedeuten $a_1 = OA_1$, $a_2 = OA_2$, $a_3 = OA_3$ die Axeneinheiten, h_1, h_2, h_3 die vorhin definirten Indices. Die Coordinaten der durch die Flächen H und H' bestimmten Kante erhalten folgende Werthe, A. pag 141:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{1}{a_2\,a_3}(h_2\,h'_3 - h_3\,h'_2) : \frac{1}{a_3\,a_1}(h_3\,h'_1 - h_1\,h'_3) : \frac{1}{a_1\,a_2}(h_1\,h'_2 - h_2\,h'_1) = \frac{1}{a_2\,a_3}\,\eta_1 : \frac{1}{a_3\,a_1}\,\eta_2 : \frac{1}{a_1\,a_2}\,\eta_3.$$

Die Grössen η_1, η_2, η_3 heissen die Indices der Kante.

Da die Gleichung (4) in mehrfacher Weise Umformungen gestattet, so könnten noch andere Bestimmungsweisen für Flächen und Kanten vorgeschlagen werden. Es ist nach A. pag. 135. 137:

$$\sin(23) = \sin(\mathrm{I}),\quad \sin(31) = \sin(\mathrm{II}),\quad \sin(12) = \sin(\mathrm{III})$$

$$\frac{\sin(1)}{\sin(\mathrm{I})} = \frac{\sin(2)}{\sin(\mathrm{II})} = \frac{\sin(3)}{\sin(\mathrm{III})}$$

worin (1), (2), (3) die bezüglich an den Kanten 1, 2, 3 liegenden äusseren Flächenwinkel der Ecke (123) und (I), (II), (III) die bezüglich an den Normalen I, II, III liegenden äusseren Flächenwinkel der Ecke (I II III) bedeuten. Demnach kann die Gleichung (4) auch so geschrieben werden:

$$(6)\qquad \cos(41)\sin(1)\cos(5\,\mathrm{I}) + \cos(42)\sin(2)\cos(5\,\mathrm{II}) + \cos(43)\sin(3)\cos(5\,\mathrm{III}) = 0.$$

Hierin kann man — und dies ist die von Dr. JUNGHANN bevorzugte Bestimmungsweise (briefliche Mittheilung 19. Mai 1877) — die Grössen cos (41) sin (1), cos (42) sin (2), cos (43) sin (3) als Coordinaten der Fläche (4) auffassen. Dann würden cos (5 I), cos (5 II), cos (5 III) die Coordinaten der Kante 5 sein.

Die Gleichung (4) nimmt ferner mit Rücksicht auf A. Formel (10) und (10 a) die Form A. Formel (62) an:

$$\frac{\cos(41)}{\cos(\mathrm{I}1)}\cos(5\,\mathrm{I}) + \frac{\cos(42)}{\cos(\mathrm{II}\,2)}\cos(5\,\mathrm{II}) + \frac{\cos(43)}{\cos(\mathrm{III}\,3)}\cos(5\,\mathrm{III}) = 0, \tag{7}$$

so dass auch $\frac{\cos(41)}{\cos(\mathrm{I}1)}$ etc. als Coordinaten der Fläche (4) und cos (5 I) etc. als Coordinaten der Kante 5 gedeutet werden können. Diese Wahl würde sich in Uebereinstimmung befinden mit den von Prof. KRONECKER in seinen Universitätsvorlesungen und in seinen „Bemerkungen zur Determinantentheorie“ in: BORCHARDT's Journal Bd. 72. 1870. pag. 159 mitgetheilten Definitionen von Punkt- und Ebenencoordinaten. —

Behalten wir die in erster Linie angeführten Coordinaten bei, so soll jetzt der Zusammenhang zwischen dem Gesetz der rationalen Indices und dem Gesetz der Zonen begründet werden. Nach MÖBIUS besteht derselbe darin:

„Jede aus den vier ersteren Flächen (Kanten) arithmetisch ableitbare Fläche oder Kante ist aus denselben Flächen (Kanten) auch geometrisch ableitbar und umgekehrt.“

D. h. Die beiden Gesetze in Rede sind aequivalent. Sie stellen dieselbe Haupteigenschaft der Krystalle, nämlich den Deductionszusammenhang der Flächen und Kanten einer Krystallgattung, von denen vier nicht zu je dreien einer Kante (Fläche) parallele Flächen (Kanten) gegeben sind, von verschiedenen Gesichtspunkten aus betrachtet dar. Von der consructiven Bestimmungsmethode, welche sich des Hilfsmittels der Zonen bedient, gelangt man zu der analytischen Bestimmungsmethode, welche das Hilfsmittel der Indices benutzt, indem man das Resultat der Construction durch Zahlen ausdrückt. Und umgekehrt kann man jede ihren Indices nach bekannte Fläche (Kante) durch Construction vermittelst Zonen ohne Anwendung von Maassstab und Zirkel finden.

Der Beweis des vorstehenden Satzes ist in dem für die neuere Geometrie bahnbrechenden Werke von F. A. Möbius: Der barycentrische Calcul 1827, enthalten. Der Abschnitt über das geometrische Netz in der Ebene pag. 266 ff. behandelt Systeme von Geraden und Punkten der Ebene, welche die Eigenschaften der Flächen und Kanten eines Krystalls besitzen, d. h. arithmetrisch und geometrisch aus je vier unter ihnen ableitbar sind.

Es werde zunächst das Gesetz der Zonen zu Grunde gelegt. Die Gleichungen der vier gegebenen Flächen C_1, C_2, C_3, A, von denen die drei ersteren zu Coordinatenebenen gewählt sein mögen, seien bezüglich:

$$\xi_1 = 0, \ \xi_2 = 0, \ \xi_3 = 0$$

$$\frac{1}{a_1}\xi_1 + \frac{1}{a_2}\xi_2 + \frac{1}{a_3}\xi_3 = 0$$

Die Fläche A bestimmt die Axenlängen a_1, a_2, a_3, welche sich im Allgemeinen wie irrationale Zahlen verhalten. Es soll nachgewiesen werden, dass jede aus den vier gegebenen Flächen geometrisch ableitbare Fläche H durch eine Gleichung von der Form:

$$\frac{h_1}{a_1}\xi_1 + \frac{h_2}{a_2}\xi_2 + \frac{h_3}{a_3}\xi_3 = 0$$

worin h_1, h_2, h_3 rationale Zahlen, die Null mit einbegriffen, sind, dargestellt werden kann. Zu diesem Zweck betrachte man die Art und Weise, wie die Coordinaten einer geometrisch abgeleiteten Fläche (Kante) aus den Coordinaten der dieser Ableitung zu Grunde liegenden Kanten (Flächen) zusammengesetzt werden. Es sind die Coordinaten der Kante, welche durch die beiden Flächen G $(g_1\ g_2\ g_3)$ und K $(k_1\ k_2\ k_3)$ bestimmt wird, enthalten in dem Rechteck:

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{g_1}{a_1} & \frac{g_2}{a_2} & \frac{g_3}{a_3} \\ \frac{k_1}{a_1} & \frac{k_2}{a_2} & \frac{k_3}{a_3} \end{array}\right|$$

Sie haben die Werthe:

$$\frac{1}{a_2\,a_3}(g_2\,k_3 - g_3\,k_2), \quad \frac{1}{a_3\,a_1}(g_3\,k_1 - g_1\,k_3),$$

$$\frac{1}{a_1\,a_2}(g_1\,k_2 - g_2\,k_1).$$

Hierin sind die Klammergrössen rationale Zahlen, wenn die Indices $g_1\ g_2\ g_3,\ k_1\ k_2\ k_3$ rationale Zahlen sind. Ferner sind die Coordinaten der Fläche, welche den Kanten

$$B\left[\frac{1}{a_2\,a_3}\,\beta_1,\ \frac{1}{a_3\,a_1}\,\beta_2,\ \frac{1}{a_1\,a_2}\,\beta_3\right] \text{ und}$$
$$\Gamma\left[\frac{1}{a_2\,a_3}\,\gamma_1,\ \frac{1}{a_3\,a_1}\,\gamma_2,\ \frac{1}{a_1\,a_2}\,\gamma_3\right]$$

parallel geht, enthalten in dem Rechteck:

$$\left|\begin{matrix} \frac{1}{a_2\,a_3}\,\beta_1 & \frac{1}{a_3\,a_1}\,\beta_2 & \frac{1}{a_1\,a_2}\,\beta_3 \\ \frac{1}{a_2\,a_3}\,\gamma_1 & \frac{1}{a_3\,a_1}\,\gamma_2 & \frac{1}{a_1\,a_2}\,\gamma_3 \end{matrix}\right|$$

Sie haben, wenn man von dem gemeinsamen Factor $\frac{1}{a_1\,a_2\,a_3}$ absieht, die Werthe:

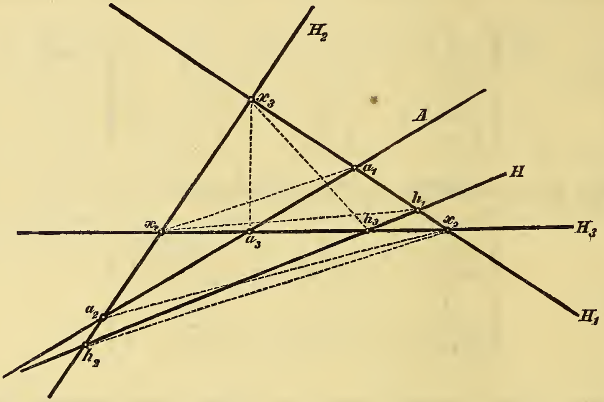
$$\frac{1}{a_1}\,(\beta_2\,\gamma_3 - \beta_3\,\gamma_2),\ \frac{1}{a_2}\,(\beta_3\,\gamma_1 - \beta_1\,\gamma_3),\ \frac{1}{a_3}\,(\beta_1\,\gamma_2 - \beta_2\,\gamma_1)$$

Hierin sind die Klammergrössen rationale Zahlen, wenn die Indices $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3,\ \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$ rationale Zahlen sind. Da nun die vier zu Grunde liegenden Flächen rationale Indices, nämlich beziehungsweise 100, 010, 001, 111, besitzen, so haben auch alle geometrisch abgeleiteten Kanten und Flächen rationale Indices, was zu beweisen war.

Es werde jetzt das Gesetz der rationalen Indices zu Grunde gelegt. Aus demselben lässt sich das Gesetz der Zonen in einfacherer Weise, als bei MÖBIUS a. a. O. ableiten, wenn man sich des anharmonischen Verhältnisses von vier Flächen in einer Zone und von vier Kanten in einer Fläche bedient. Das anharmonische Verhältniss ist nur abhängig von den Indices (A. pag. 154) und daher mit diesen rational. — Es sind gegeben die Flächen H_1, H_2, H_3, A und ausserdem die Gleichung einer Fläche H:

$$\frac{h_1}{a_1}\,\xi_1 + \frac{h_2}{a_2}\,\xi_2 + \frac{h_3}{a_3}\,\xi_3 = 0$$

worin die Grössen h_1, h_2, h_3 rationale Zahlen, die Null mit einbegriffen, sind. Der gesuchte Beweis wird erbracht sein, wenn wir nachweisen, dass die Fläche H bestimmt werden kann durch in ihr liegende Kantenrichtungen, welche ihrerseits durch schon vorhandene Flächen mit rationalen Indices erzeugt



werden. Die Kantenrichtungen, welche die Flächen A und H auf den Flächen H_1, H_2, H_3 erzeugen (vergl. die beistehende Linearprojection, in welcher die Sectionslinien der Flächen und die Schnittpunkte der Kanten mit denselben Buchstaben wie die Flächen und Kanten bezeichnet sind), haben folgende Coordinaten und Indices:

$$
\begin{array}{llll}
Oa_1 : & 0 \quad , -\dfrac{1}{a_3\,a_1}, & \dfrac{1}{a_1\,a_2} & [0\,\bar{1}\,1] \\[2ex]
Oa_2 : & \dfrac{1}{a_2\,a_3}, \quad 0 \quad , & -\dfrac{1}{a_1\,a_2} & [1\,0\,\bar{1}] \\[2ex]
Oa_3 : & -\dfrac{1}{a_2\,a_3}, \quad \dfrac{1}{a_3\,a_1}, & 0 & [\bar{1}\,1\,0] \\[2ex]
Oh_1 : & 0 \quad , -\dfrac{h_3}{a_3\,a_1}, & \dfrac{h_2}{a_1\,a_2} & [0\,\bar{h}_3\,h_2] \\[2ex]
Oh_2 : & \dfrac{h_3}{a_2\,a_3}, \quad 0 \quad , & -\dfrac{h_1}{a_1\,a_2} & [h_3\,0\,\bar{h}_1] \\[2ex]
Oh_3 : & -\dfrac{h_2}{a_2\,a_3}, \quad \dfrac{h_1}{a_3\,a_1}, & 0 & [\bar{h}_2\,h_1\,0]
\end{array}
$$

Durch die Axen Ox_1, Ox_2, Ox_3 kann man nun je vier Flächen legen, nämlich durch

Ox_1 und Ox_2, Ox_3, Oa_1, Oh_1
Ox_2 und Ox_3, Ox_1, Oa_2, Oh_2
Ox_3 und Ox_1, Ox_2, Oa_3, Oh_3,

welche wir kurz bezeichnen mit $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_1 a_1$, $x_1 h_1$, etc. Ihre Coordinaten und Indices sind in folgendem Schema enthalten:

$$
\begin{array}{lcccc}
x_2 x_3: & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & (100) \\
x_3 x_1: & 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & (010) \\
x_1 x_2: & 0 & 0 & \frac{1}{a_3} & (001) \\
x_1 a_1: & 0 & \frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_3} & (011) \\
x_2 a_2: & \frac{1}{a_1} & 0 & \frac{1}{a_3} & (101) \\
x_3 a_3: & \frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & 0 & (110) \\
x_1 h_1: & 0 & \frac{h_2}{a_2} & \frac{h_3}{a_3} & (0 h_2 h_3) \\
x_2 h_2: & \frac{h_1}{a_1} & 0 & \frac{h_3}{a_3} & (h_1 0 h_3) \\
x_3 h_3: & \frac{h_1}{a_1} & \frac{h_2}{a_2} & 0 & (h_1 h_2 0)
\end{array}
$$

Bilden wir nun die anharmonischen Verhältnisse der von Ox_1, Ox_2, Ox_3 ausgehenden Flächen:

$$(x_1 \,.\, x_2 \; x_3 \; a_1 \; h_1) = \frac{h_2 - h_3}{h_3}$$

$$(x_2 \,.\, x_3 \; x_1 \; a_2 \; h_2) = \frac{h_3 - h_1}{h_1}$$

$$(x_3 \,.\, x_1 \; x_2 \; a_3 \; h_3) = \frac{h_1 - h_2}{h_2}$$

Beispielsweise möge der erste Ausdruck berechnet werden. Nach A. pag. 151 Formel (75) ist für $\varepsilon = k = 1$:

$$r = \frac{h_2 h'_3 - h_3 h'_2}{h_2 h''_3 - h_3 h''_2} \cdot \frac{h'''_2 h''_3 - h'''_3 h''_2}{h'''_2 h'_3 - h'''_3 h'_2}$$

Werden in dem vorliegenden Falle für die Indices $h_1 \, h_2 \, h_3$, $h'_1 \, h'_2 \, h'_3$, $h''_1 \, h''_2 \, h''_3$, $h'''_1 \, h'''_2 \, h'''_3$ beziehungsweise die Indices der Flächen $x_1 x_2$ (001), $x_1 x_3$ (010), $x_1 a_1$ (011), $x_1 h_1$ ($0 h_2 h_3$) gesetzt, so ergiebt sich:

$$(x_1 \,.\, x_2 x_3 a_1 h_1) = \frac{0.0 - 1.1}{0.1 - 1.1} \cdot \frac{h_2 .1 - h_3 .1}{h_2 .0 - h_3 .1} = \frac{h_2 - h_3}{h_3}.$$

Die drei vorstehenden anharmonischen Verhältnisse sind bekannt, sobald die Indices der zu construirenden Fläche H ($h_1 h_2 h_3$) gegeben sind. Nun wird, wenn das anharmonische Verhältniss von vier Elementen gegeben ist und wenn ausserdem von diesen vier Elementen drei gegeben sind, das vierte Element ohne Anwendung von Maassstab und Zirkel allein mit Hilfe des Lineals construirt. Man kann also mit Hilfe der obigen anharmonischen Verhältnisse ohne Anwendung von Maassstab und Zirkel in den Ebenen H_1, H_2, H_3 beziehungsweise die Kanten $O h_1$, $O h_2$, $O h_3$, von denen je zwei die Lage der Fläche H bestimmen, construiren. Damit ist die Aequivalenz des Gesetzes der rationalen Indices mit dem Gesetz der Zonen bewiesen.

Eine analoge Beziehung findet zwischen den beiden Gesetzen statt, welche den Einfluss der Temperatur auf die Lage der Krystallflächen beherrschen. Erfahrungsmässig ist das Gesetz der rationalen Indices unabhängig von der Temperatur. (G e s e t z d e r E r h a l t u n g d e r r a t i o n a l e n I n d i c e s.) Da die Indices als rationale Zahlen sich nicht stetig mit der Temperatur ändern können, so müssen für jede Fläche die Verhältnisse ihrer Indices bei jeder Temperatur dieselben bleiben. Nun enthält die Bedingung dafür, dass drei Flächen H ($h_1 h_2 h_3$), H′ ($h_1' h_2' h_3'$), H″ ($h_1'' h_2'' h_3''$) einer Zone angehören, nur die Indices dieser Flächen:

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h'_1 & h'_2 & h'_3 \\ h''_1 & h''_2 & h''_3 \end{vmatrix} = 0$$

und ist unabhängig von den Axenlängen und den durch die Axen eingeschlossenen Winkeln, welche Grössen im Allgemeinen mit der Temperatur stetig veränderlich sind. Demnach bleiben die Flächen, welche bei irgend einer Temperatur in einer Zone liegen, auch bei irgend einer anderen Temperatur tautozonal (G e s e t z d e r E r h a l t u n g d e r Z o n e n *)).

*) Vergl. Grailich und v. Lang, Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 1858. Mathem.-physik. Cl. Bd. XXXIII. pag. 369 ff. — Referat von C. Neumann in: Fortschritte der Physik f. d. J. 1858. — V. v. Lang, Lehrbuch der Krystallographie 1866. §. 34.

Die aus den Indices $h_1\ h_2\ h_3$, $h_1'\ h_2'\ h_3'$, $h_1''\ h_2''\ h_3''$ gebildete Determinante lässt sich nicht in einen Ausdruck umformen, der nur trigonometrische Functionen der von drei tautozonalen Flächen H, H′, H″ eingeschlossenen Winkel enthält. Demnach giebt es im Allgemeinen keinen für die Winkel zwischen nur drei tautozonalen Flächen bestehenden Ausdruck, der bei jeder Temperatur constant bleibt. Dies müsste indessen der Fall sein, wenn das Gesetz der Rationalität der Tangenten tautozonaler Kanten in Wirklichkeit diejenige allgemeine Gültigkeit besässe, welche ihm von Fr. Naumann*) zugesprochen wurde.**) Naumann leitete bekanntlich durch eine theoretische Betrachtung die Bedingungsgleichungen ab, welche die Axenlängen und die von den Axen eingeschlossenen Winkel erfüllen müssen, wenn die Krystalle des asymmetrischen Krystallisationssystemes jener Regel unterworfen sein sollen. Dieser Betrachtung legte er die Hypothese zu Grunde, dass die Axenlängen jedes Krystalles entweder rationale Zahlen oder durch Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen darstellbar seien. Im Anschluss an seine analytischen Ergebnisse versuchte Naumann zu zeigen, dass die theoretischen Bedingungen durch die vorhandenen Beobachtungsresultate befriedigt werden. Da nun hiernach das unter der angegebenen Voraussetzung abgeleitete Gesetz der Rationalität der Tangenten tautozonaler Kanten eine durch alle Beobachtungen bestätigte Thatsache sei, so folgerte Naumann, dass auch die zu Grunde liegende, zuerst von Ch. S. Weiss aufgestellte Hypothese, betreffend die Darstellbarkeit der Axenlängen durch Quadratwurzelgrössen, als richtig erwiesen sei. Allein schon die theoretischen Consequenzen, welche V. v. Lang unter der Annahme der allgemeinen Gültigkeit des Gesetzes in Rede aus demselben zog***), lassen erkennen, dass dieses Gesetz keineswegs in allen Fällen mit der Wirklichkeit übereinstimmen kann. Die interessante Untersuchung Lang's ergab unter der erwähnten Voraussetzung, dass die Tangeten tautozonaler Kanten rationale Vielfache derselben Quadratwurzelgrösse seien; dass die goniometrischen Functionen irgend einer Krystallkante (oder eines ebenen Krystallwinkels) sich durch Quadratwurzeln aus-

---

*) Abhandl. d. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. II. 1855. — Elemente der theoretischen Krystallographie 1856. pag. 54—57. 235. 333. 334. 355. 372—375.

**) Allerdings benutzt Naumann zur Formulirung seines Gesetzes vier Flächen F, F′, F_1, F_1'. Allein es kommen nur die Winkel (F F′) und ($F_1\,F_1'$) in Betracht. Daher ist offenbar, dass das Gesetz auch gelten muss, wenn F′ mit F_1 zusammenfällt.

***) Sitz.-Ber. d. Wien. Akad. 1860., math.-phys. Cl. Bd. XLI. pag. 525—534.

drücken lassen; dass jede Fläche, welche zu einer anderen Fläche in einer Zone senkrecht steht, sowie jede Fläche, welche auf einer Krystallkante senkrecht steht, eine mögliche Krystallfläche sei; dass jeder Krystall sich wenigstens auf ein monoklinoëdrisches Axensystem beziehen lassen müsse. Demnach stehen die so vielfach ventilirten Fragen nach der Möglichkeit rechtwinkliger Axensysteme, der Darstellbarkeit der Axenlängen durch Quadratwurzelgrössen und der Rationalität der Tangenten tautozonaler Kanten im Zusammenhange und erledigen sich gleichzeitig mit einer unter ihnen. Mit der Prüfung dieser Fragen beschäftigte sich in eingehender Weise G. vom Rath in seiner bewundernswerthen Abhandlung über den Axinit.*) Auf Grund genauer Messungen gelang es ihm zu zeigen, dass die Bedingungen Naumann's durch die neu gewonnenen Elemente des Axinit nicht erfüllt werden. Damit war nachgewiesen, dass das Gesetz der Rationalität der Tangenten tautozonaler Kanten und die mit ihm zusammenhängenden Relationen für das asymmetrische Krystallisationssystem keine Gültigkeit besitzen. Zu demselben Ergebniss führt folgende theoretische Erwägung: die Verhältnisse der Tangenten tautozonaler Kanten enthalten die Axenlängen und die von den Axen eingeschlossenen Winkel; da diese Grössen im Allgemeinen mit der Temperatur stetig veränderlich sind, so sind es auch die Verhältnisse jener Tangenten. Die Aufsuchung der einzelnen Fälle, in denen die Tangenten tautozonaler Kanten sich wie rationale Zahlen verhalten, setzt die Kenntniss der Symmetrieverhältnisse der Krystalle voraus.

Bezeichnet man den Cosinus des von den Coordinatenaxen x_i und x_k eingeschlossenen Winkels mit c_{ik} und wendet man ferner für die aus den Grössen c_{ik} gebildete Determinante das Symbol Δ an, so ist im asymmetrischen Krystallisationssystem die Tangente der von den Flächen H' $(h'_1\ h'_2\ h'_3)$ und H'' $(h''_1\ h''_2\ h''_3)$ gebildeten Kante:

$$\tan (H'H'') = \frac{\sqrt{\Delta \ . \sum\limits_{i,k=1}^{3} c_{ik}\ a_i\ a_k\ \eta_i\ \eta_k}}{a_1\ a_2\ a_3\ . \sum\limits_{i,k=1}^{3} \Delta_{ik}\ \frac{h'_i}{a_i}\ \frac{h''_k}{a_k}}$$

Hierin ist $\eta_1 = h_2'h_3'' - h_3'h_2''$, $\eta_2 = h_3'h_1'' - h_1'h_3''$, $\eta_3 = h_1'h_2'' - h_2'h_1''$. In den schiefwinkligen (asymmetrischen und monosymmetrischen) Krystallisationssystemen ist

*) Pogg. Ann. 1866. Bd. 128. pag. 166 ff.

das Verhältniss der Tangenten tautozonaler Kanten niemals einem Verhältniss von rationalen Zahlen gleich, da jenes Verhältniss stets die von den Axen eingeschlossenen Winkel, von denen also wenigstens der eine von 90^0 verschieden ist, enthält. Wir können daher unsere Betrachtung auf die rechtwinkligen Krystallisationssysteme beschränken. In diesen ist $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1$, $c_{23} = c_{31} = c_{12} = 0$, $\Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = 1$, $\Delta_{23} = \Delta_{31} = \Delta_{12} = 0$, $\Delta = 1$, also:

$$\tan\,(H'H'') = \frac{(a_1 a_1 (h_2'h_3'' - h_3'h_2'')^2 + a_2 a_2 (h_3'h_1'' - h_1'h_3'')^2 + a_3 a_3 (h_1'h_2'' - h_2'h_1'')^2)}{a_1\ a_2\ a_3 \left(\dfrac{h_1'h_1''}{a_1\ a_1} + \dfrac{h_2'h_2''}{a_2\ a_2} + \dfrac{h_3'h_3''}{a_3\ a_3}\right)}$$

Ein analoger Ausdruck besteht für die Flächen K' $(k_1' k_2' k_3')$ und K'' $(k_1'' k_2'' k_3'')$.

Gehören H', H'', K', K'' derselben Zone an, so kann man setzen:

$$h_2' h_3'' - h_3' h_2'' = \lambda\,.\,(k_2' k_3'' - k_3' k_2''),\ \text{etc.}$$

worin λ eine rationale Zahl bedeutet. Demnach ist, unter R eine rationale Zahl verstanden,:

$$\frac{\tan\,(H'H'')}{\tan\,(K'K'')} = R\,.\,\frac{\dfrac{k_1'k_1''}{a_1\ a_1} + \dfrac{k_2'k_2''}{a_2\ a_2} + \dfrac{k_3'k_3''}{a_3\ a_3}}{\dfrac{h_1'h_1''}{a_1\ a_1} + \dfrac{h_2'h_2''}{a_2\ a_2} + \dfrac{h_3'h_3''}{a_3\ a_3}}$$

Dieser Ausdruck erhält einen rationalen Zahlenwerth: 1. wenn die Coordinatenaxenlängen a_1, a_2, a_3 Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen sind, 2. wenn sowohl eine der Ebenen H', H'' als auch eine der Ebenen K', K'' mit einer und derselben Coordinatenaxenebene zusammenfällt. Es mögen beispielsweise H' und K' mit $x_2\ x_3$ zusammenfallen; dann ist $h_2' = h_3' = 0$, $h_2' = k_3' = 0$ und:

$$\frac{\tan\,(H'H'')}{\tan\,(K'K'')} = R\,.\,\frac{k_1'k_1''}{h_1'h_1''}$$

D. h. Wenn in einem rechtwinklichen Krystallisationssysteme eine Zonenaxe in einer Coordinatenaxenebene liegt, so verhalten sich die Tangenten der Winkel, welche diese Ebene mit den Flächen der Zone einschliesst, wie rationale Zahlen. Ein analoger Satz gilt für die Winkel, welche eine Coordinatenaxe mit den Zonenaxen einschliesst, die in einer durch die Coordinatenaxe gehenden Fläche liegen. Die einzelnen rechtwinkligen Krystallisationssysteme, ausgenommen das rhombische, besitzen noch folgende durch die höhere Symmetrie bedingte besondere Eigenschaften.

Im quadratischen Krystallisationssystem ist $a_2 = a_1 = a$, $a_3 = c$, folglich ist:

$$\tan (H' H'') = \frac{\sqrt{a\,a\,((h_2' h_3'' - h_3' h_2'')^2 + (h_3' h_1'' - h_1' h_3'')^2) + c\,c\,(h_1' h_2'' - h_2' h_1''}}{a\,a\,c \left(\frac{h_1' h_1''}{a\,a} + \frac{h_2' h_2''}{a\,a} + \frac{h_3' h_3''}{c\,c} \right)}$$

Sind H', H'' zwei Flächen der Aequatorialzone, so ist $h_3' = h_3'' = o$, und

$$\tan (H' H'') = \frac{h_1' h_2'' - h_2' h_1''}{h_1' h_1'' + h_2' h_2''}.$$

D. h. Die Tangenten der Kanten in der Aequitorialzone des quadratischen Systems sind rationale Zahlen.

Im regulären Krystallisationssystem ist $a_1 = a_2 = a_2 = 1$, folglich ist:

$$\tan (H' H'') = \frac{\sqrt{(h_2' h_3'' - h_3' h_2'')^2 + (h_3' h_1'' - h_1' h_3'')^2 + (h_1' h_2'' - h_2' h_1'')^2}}{h_1' h_1'' + h_2' h_2'' + h_3' h_3''}$$

D. h. Die Tangenten der Kanten des regulären Systems sind Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen.

Bedient man sich im hexagonalen Krystallisationssystem der SCHRAUF'schen orthohexagonalen Coordinatenaxen, so ist $a_1 = a$, $a_2 = a\sqrt{3}$, $a_3 = c$:

$$\tan (H' H'') = \frac{\sqrt{a\,a\,((h_2' h_3'' - h_3' h_2'')^2 + 3(h_3' h_1'' - h_1' h_3'')^2) + c\,c\,(h_1' h_2'' - h_2' h_1'}}{a\,a\sqrt{3}\,c \left(\frac{h_1' h_1''}{a\,a} + \frac{1}{3}\,\frac{h_2' h_2''}{a\,a} + \frac{h_3' h_3''}{c\,c} \right)}$$

Hieraus geht hervor, dass die Tangenten der Kanten in der Aequatorialzone des hexagonalen Systems Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen sind; denn es ist, wenn $h_3' = h_3'' = 0$ gesetzt wird:

$$\tan (H' H'') = \sqrt{3} \cdot \frac{h_1' h_2'' - h_2' h_1''}{3\,h_1' h_1'' + h_2' h_2''}$$

Das Gesetz der Rationalität der Tangenten tautozonaler Flächen besitzt also nur einen sehr beschränkten Geltungsbereich. Es giebt aber einen auf vier tautozonale Flächen bezüglichen Ausdruck in den von diesen Flächen eingeschlossenen Winkeln, welcher unabhängig von der Temperatur ist, nämlich das anharmonische Verhältniss von vier einer Zone angehörenden Flächen. Dieses Verhältniss ist unabhängig von den Axenlängen und von den durch die Axen eingeschlossenen Winkeln und nur abhängig von den Indices der vier Flächen H $(h_1\, h_2\, h_3)$, H′ $(h_1'\, h_2'\, h_3')$, H″ $(h_1''\, h_2''\, h_3'')$, H‴ $(h_1'''\, h_2'''\, h_3''')$. Es ist (vergl. A. pag. 151) das anharmonische Verhältniss:

$$(H\, H'\, H''\, H''') = \frac{(h\, h')_\varepsilon}{(h'\, h'')_\varepsilon} \cdot \frac{(h'\, h''')_\varkappa}{(h\, h''')_\varkappa}$$

worin $\varepsilon, \varkappa = 1, 2, 3$ und $(h\, h')_1 = h_2\, h_3' - h_3\, h_2'$, u. s. w., und andererseits:

$$(H\, H'\, H''\, H''') = \frac{\sin\, (H\, H'')}{\sin\, (H'\, H'')} \cdot \frac{\sin\, (H'\, H''')}{\sin\, (H\, H''')}$$

Im Allgemeinen verändern sich die Winkel zwischen je zwei Krystallflächen stetig mit der Temperatur. Allein mit der Veränderung der Temperatur geht die Veränderung der Winkel tautozonaler Flächen so vor sich, dass das anharmonische Verhältniss (H H′ H″ H‴) zwischen vier dieser Flächen H, H′, H″, H‴ denselben Werth behält. Ein analoger Satz besteht für Kanten in einer Fläche. (Gesetz der Erhaltung des anharmonischen Verhältnisses von tautozonalen Flächen und von Kanten in einer Fläche.)

3. Gesetz der Symmetrie.

Es soll hier nur der Zusammenhang des Gesetzes der Symmetrie mit dem Gesetz der rationalen Indices hervorgehoben werden, der sich kürzer als in dem Lehrbuche V. von Lang's darstellen lässt, wenn man das anharmonische Verhältniss von vier tautozonalen Flächen durch die Winkel zwischen diesen Flächen ausdrückt.

Zufolge der Definition der Symmetrie-Ebene sind zwei Flächen H′ und H″ symmetrisch in Bezug auf jede der beiden mit ihnen in einer Zone liegenden Flächen G und K, wenn G den Winkel (H′ H″) und K dessen Nebenwinkel halbirt. Das anharmonische Verhältniss:

$$(H' \, H'' \, G \, K) = \frac{\sin \, (H' \, G)}{\sin \, (H'' \, G)} \cdot \frac{\sin \, (H'' \, K)}{\sin \, (H' \, K)}$$

ist in diesem Falle ein harmonisches:

$$(H' \; H'' \; G \; K) = -$$

Denn es ist: $(H' \, G) = (G \, H'')$ und $(H' \, K) + (H'' \, K) = 180^0$, also

$$\frac{\sin \, (H' \, G)}{\sin \, (H'' \, G)} = -1 \text{ und } \frac{\sin \, (H'' \, K)}{\sin \, (H' \, K)} = 1.$$

Die Flächen H' und H'' heissen einander zugeordnet in Bezug auf die Symmetrie-Ebenen G und K. Die einander zugeordneten Paare von tautozonalen Flächen sind zugeordnete harmonische Flächen zu den beiden rechtwinklich auf einander stehenden Symmetrie-Ebenen. Wenn die Flächen eines Paares zugeordneter Flächen zusammenfallen, so muss auch eine Symmetrie-Ebene mit ihnen zusammenfallen. Demnach stellt eine Symmetrie-Ebene ein zusammenfallendes Flächenpaar dar. Da (H' H'' G K) eine rationale Zahl ist, so erhellt, dass nur mögliche Krystallflächen Symmetrie-Ebenen sein können. Ferner geht daraus hervor, dass tautozonale Flächen, welche bei irgend einer Temperatur eine symmetrische Zone bilden, auch bei jeder anderen Temperatur ihre Symmetrie bewahren. (Gesetz der Erhaltung der Symmetrie.) Es erhebt sich nun die Frage, ob und wann tautozonale Flächen in mehrfacher Weise so zu Paaren geordnet werden können, dass diese Paare zugeordnete harmonische Paare zu Symmetrie-Ebenen, die nicht senkrecht auf einander stehen, sind.

Es seien G und K zwei unter einem von 90^0 verschiedenen Winkel zu einander geneigte Ebenen, welche Symmetrie-Ebenen der durch sie bestimmten Zone sein sollen. Der Fläche G entspreche in Bezug auf K die Fläche P, der Fläche K entspreche in Bezug auf G die Fläche Q. Dann haben wir vier tautozonale Flächen: Q, G, K, P, welche unter einander drei gleiche Winkel einschliessen, nämlich den von den Symmetrie-Ebenen G und K gebildeten Winkel: $(G \, K) = \varphi$. Damit die vier Flächen mögliche Krystallflächen seien, muss das anharmonische Verhältniss:

$$(Q \, G \, K \, P) = \frac{\sin \, (Q \, K)}{\sin \, (G \, K)} \cdot \frac{\sin \, (G \, P)}{\sin \, (Q \, P)}$$

einen rationalen Zahlenwerth, Null und Unendlich mit einbegriffen, besitzen. Nun ist:

$$(Q\,K) = 2\,\varphi, \quad (G\,P) = 2\,\varphi, \quad (Q\,P) = 3\,\varphi$$

folglich:

$$(Q\,G\,K\,P) = \frac{\sin 2\varphi \,.\, \sin 2\varphi}{\sin \varphi \,.\, \sin 3\varphi}$$

oder:

$$(Q\,G\,K\,P) = \frac{4 \cos^2\varphi}{4 \cos^2\varphi - 1}$$

Daraus ergiebt sich: das anharmonische Verhältniss $(Q\,G\,K\,P)$ ist rational, wenn $\cos^2\varphi$ rational ist. Dies ist der Fall für folgende Werthe von φ, wenn wir absehen 1. von dem schon vorhin betrachteten Falle $\varphi = 90^0$, in welchem $\cos 90^0 = 0$ und $(Q\,G\,K\,P) = 0$ ist, und 2. von dem Falle $\varphi = 0^0$, der keine Bedeutung besitzt:

$$\varphi = 60^0, \quad \cos 60^0 = \frac{1}{2}, \quad (Q\,G\,K\,P) = \infty$$

$$\varphi = 45^0, \quad \cos 45^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (Q\,G\,K\,P) = 2$$

$$\varphi = 30^0, \quad \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (Q\,G\,K\,P) = \frac{3}{2}$$

Der Grad der Symmetrie in einer Zone ist also 2, 3, 4 oder 6.

Druckfehlerverzeichniss

für Band XXIX.

S. 216	Z.	6	v. u.	lies: „Speeton“ statt Specton.
- 362	-	4	v. u.	- „Plagioklas“ statt Plagioklar.
- 464	-	18	v. o.	- „Granat“ statt Granit.
- 473	-	15	v. o.	- „Monticellitpseudomorphosen“ statt Monticellitmetamorphosen.
- 480	-	5	v. o.	- „28“ statt 27.
- 484	-	18	v. o.	- „1,93“ statt 0,93.
- 491	-	13	v. u.	- „Millimeter“ statt Meter.
- 517	-	6	v. o.	- „$\frac{OA_1}{OH_1}, \frac{OA_2}{OH_2}, \frac{OA_3}{OH_3}$“ statt $\frac{OA_1}{OH_1} : \frac{OA_2}{OH_2} : \frac{OA_3}{OH_3}$
- 527	-	4	v. u.	- „Tangenten“ statt Tangeten.
- 532	-	3	v. o.	- „$(H' H'' G K) = -1$.“ statt $(H' H'' G K) = -$.