Abhandlungen.

Ueber die allgemeinste Form der Wheatstone'schen Brücke.

Von

H. Weber.

Herr O. Fröhlich*) hat gefunden, dass dem bekannten Satze von der Wheatstone'schen Brücke eine Erweiterung gegeben werden könne, in welcher die gewöhnliche Anwendung der Brücke als specieller Fall enthalten ist. Stellt man die Brücke wie üblich durch ein Parallelogramm mit Diagonalen dar, so lässt sich das Brückengesetz in allgemeinster Form wie folgt aussprechen: Sind in den einzelnen Leitern der Wheatstone'schen Brücke beliebige elektromotorische Kräfte vorhanden, und bleibt die Intensität in einer der Diagonalen constant, während in der anderen der Widerstand oder die elektromotorische Kraft beliebig geändert wird, so sind die Producte aus den Widerständen der gegenüberliegenden Leiter einander gleich. Dieser Satz gilt auch umgekehrt, der Art, dass, wenn die Producte der Widerstände der gegenüberliegenden Leiter gleich sind, und in einer der Diagonalen die elektromotorische Kraft oder der Widerstand beliebig geändert wird, alsdann die Intensität in der anderen Diagonale ungeändert bleibt.

In dem Folgenden soll die Wheatstone'sche Brücke in ihrer allgemeinsten Form betrachtet und daraus der obige Satz abgeleitet werden.

---

*) O. Fröhlich, Elektrotechn. Zeitschrift, Jahrg. 7, 1886, S. 483.

Die Wheatstone'sche Brückenverzweigung lässt sich durch ein Tetraeder $ABCD$ (Fig. 1) darstellen, dessen Kanten die einzelnen Leiter bilden. Wir nehmen ABC als Grundfläche, D als Spitze an. Es ist leicht, diese Form in eine der bekannten überzuführen. Macht man z. B. CAB zum Gleitdraht

Fig. 1.

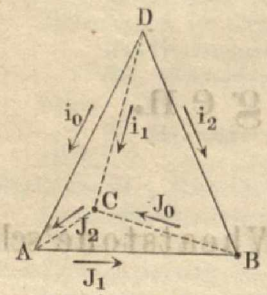
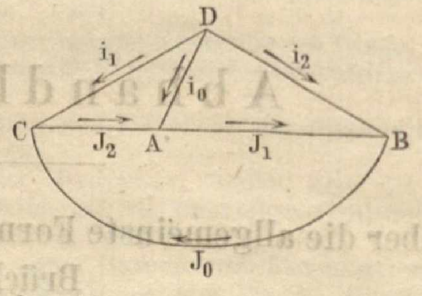


Fig. 2.



und lässt D in die Grundfläche fallen, so nimmt die Verzweigung die Form (Fig. 2) der Kirchhoff'schen Brücke an.

Es möge nun in jeder der Kanten eine elektromotorische Kraft enthalten sein, es handelt sich dann zunächst darum, die Intensität in jedem der sechs Leiter zu finden. Wir nehmen die Richtungen DA, DC, DB, BC, AB, CA als positive Richtungen an, und bezeichnen die Intensitäten der in ihnen fliessenden Ströme der Reihe nach durch $i_0\, i_1\, i_2\, I_0\, I_1\, I_2$. Die in den Leitern wirkenden elektromotorischen Kräfte $e_0\, e_1\, e_2\, E_0\, E_1\, E_2$ betrachten wir als gegeben. Dieselben mögen als positiv, d. h. so wirkend vorausgesetzt werden, dass sie die positive Elektricität in der positiven Richtung treiben. Wirkt eine der elektromotorischen Kräfte der positiven Richtung entgegen, so hat man alsdann ihr das negative Vorzeichen zu geben. Endlich seien die Widerstände der Leiter der Reihe nach durch $w_0\, w_1\, w_2\, W_0\, W_1\, W_2$ bezeichnet. Die Leiter DA und BC, DC und AB, DB und CA sollen mit Maxwell conjugirte Leiter genannt werden, da sie verwandte Eigenschaften besitzen.

Wendet man die Kirchhoff'schen Gesetze auf die Punkte B, A, C und auf die Begrenzungen der Flächen ABC, ADB, ACD an, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll}
I_0 = I_1 + i_2 & I_0 W_0 + I_1 W_1 + I_2 W_2 = & E_0 + E_1 + E_2 \\
I_1 = I_2 + i_0 & -I_1 W_1 - i_0 w_0 + i_2 w_2 = & -E_1 - e_0 + e_2 \\
I_2 = I_0 + i_1 & -I_2 W_2 + i_0 w_0 - i_1 w_1 = & -E_2 + e_0 - e_1
\end{array}$$

Die entsprechenden Gleichungen für den Punkt D und die Fläche BCD aufzustellen, ist unnöthig, da dieselben eine nothwendige Folge der bereits aufgeführten Gleichungen sind, wovon man sich durch Addition der obigen Gleichungen sofort überzeugt.

Eliminirt man mit Hülfe dieser Gleichungen die Grössen $I_1 \, I_2 \, i_0 \, i_1 \, i_2$, so ergiebt sich:

$$
(1) \quad \begin{aligned}
I_0 = \{ & [w_0(w_1+w_2+W_1+W_2)+(w_1+W_2)(W_1+w_2)]E_0 \\
& +[w_0(w_1+w_2)+w_2(w_1+W_2)]E_1 \\
& +[w_0(w_1+w_2)+w_1(W_1+w_2)]E_2 \\
& +[w_2 W_2 - w_1 W_1]e_0 \\
& -[w_0(W_1+W_2)+W_2(W_1+w_2)]e_1 \\
& +[w_0(W_1+W_2)+W_1(w_1+W_2)]e_2 \} \frac{1}{N}
\end{aligned}
$$

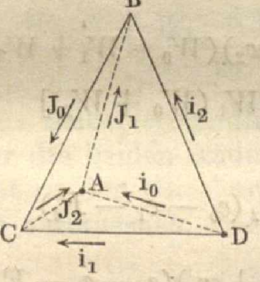
wo

$$
\begin{aligned}
N = {} & w_0 W_0 (w_1+w_2+W_1+W_2) + w_0(w_1+w_2)(W_1+W_2) \\
& + W_0(w_1+W_2)(W_1+w_2) + w_1 w_2 (W_1+W_2) \\
& + W_1 W_2 (w_1+w_2)
\end{aligned}
$$

zu setzen ist.

Ebenso lässt sich aus den obigen Gleichungen die Intensität i_0 in dem conjugirten Leiter entwickeln, dieselbe lässt sich jedoch auch indirect aus dem Werthe von I_0 auf folgende Weise ableiten.

Fig. 3.



Dreht man das Tetraeder (Fig. 1) um die Kante AC so, dass ACD die Grundfläche und B die Spitze wird und ertheilt demselben sodann eine fernere Drehung auf seiner Grundfläche, bis die Kante CB dieselbe Lage erhält, welche vordem AD einnahm, so wird das Tetraeder in seiner neuen Lage durch Fig. 3 dargestellt.

Man erhält folglich aus dem obigen Werthe von I_0 denjenigen von i_0, wenn man

$$I_0 \; W_0 \; W_1 \; W_2 \; w_0 \; w_1 \; w_2 \; E_0 \; E_1 \; E_2 \; e_0 \; e_1 \; e_2$$

ersetzt durch

$$i_0 \; w_0 \; w_1 \; W_2 \; W_0 \; W_1 \; w_2 \; e_0 \; - e_1 \; - E_2 \; E_0 \; - E_1 \; - e_2.$$

Folglich ergiebt sich

$$
(2) \quad \begin{aligned}
i_0 = \{ & (w_2 W_2 - w_1 W_1)E_0 + [W_0(w_1+W_2)+W_2(w_1+w_2)]E_1 \\
& -[W_0(W_1+w_2)+W_1(w_1+w_2)]E_2 \\
& +[W_0(w_1+w_2+W_1+W_2)+(w_1+w_2)(W_1+W_2]e_0 \\
& -[W_0(W_1+w_2)+w_2(W_1+W_2)]e_1 \\
& -[W_0(w_1+W_2)+w_1(W_1+W_2)]e_2 \} \frac{1}{N}
\end{aligned}
$$

Der Werth von N ist dabei derselbe wie früher.

Aus den Ausdrücken für I_0 und i_0 ergeben sich diejenigen für $I_1\ I_2\ i_1\ i_2$, indem man die Indices cyclisch vertauscht. Setzt man für 0, 1, 2 die Zahlen 1, 2, 0, so finden sich zunächst I_1 und i_1. Nimmt man dieselbe Vertauschung in den so gewonnenen Formeln noch einmal vor, so ergeben sich die Werthe von I_2 und i_2, dabei behält N denselben Werth bei. Es ist hiernach die Intensität in jedem der sechs Leiter bekannt.

Um das im Eingange angeführte Gesetz zu beweisen, ist die Bemerkung von Wichtigkeit, dass sich die Ausdrücke von I_0 und i_0 auf folgende Form bringen lassen:

$$I_0 = \left\{\frac{w_0(W_1+W_2)+W_2(W_1+w_2)}{W_1}[w_2(E_0+E_1+E_2) + W_1(E_0-e_1+e_2)] - \frac{w_2W_2-w_1W_1}{W_1}[(w_0+w_2)(E_0+E_1+E_2) + W_1(E_0+E_2-e_0+e_2)]\right\}\frac{1}{N}$$

wo

$$N = \frac{w_0(W_1+W_2)+W_2(W_1+w_2)}{W_1}[w_2(W_1+W_2) + W_0(W_1+w_2)] - \frac{w_2W_2-w_1W_1}{W_1}[(w_0+w_2)(W_0+W_1+W_2) + W_1(W_0+W_2)]$$

ist,

$$i_0 = \left\{\frac{W_0(w_1+W_2)+W_2(w_1+w_2)}{w_1}[w_2(e_0-e_1-E_2) + w_1(e_0-e_2+E_1)] - \frac{w_2W_2-w_1W_1}{w_1}[(W_0+w_2)(e_0-e_1-E_2) + w_1(e_0-e_2-E_0-E_2)]\right\}\frac{1}{N}$$

wo

$$N = \frac{W_0(w_1+W_2)+W_2(w_1+w_2)}{w_1}[w_2(w_1+W_2) + w_0(w_1+w_2)] - \frac{w_2W_2-w_1W_1}{w_1}[(W_0+w_2)(w_0+w_1+W_2) + w_1(w_0+W_2)]$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich unmittelbar, wenn die Bedingung

$$w_2W_2 - w_1W_1 = 0$$

erfüllt ist,

$$(3) \qquad I_0 = \frac{w_2(E_0 + E_1 + E_2) + W_1(E_0 - e_1 + e_2)}{w_2(W_1 + W_2) + W_0(W_1 + w_2)}$$

$$(4) \qquad i_0 = \frac{w_2(e_0 - e_1 - E_2) + w_1(e_0 - e_2 + E_1)}{w_2(w_1 + W_2) + w_0(w_1 + w_2)}$$

und man sieht, dass alsdann I_0 gänzlich von der elektromotorischen Kraft e_0 und dem Widerstande w_0 im conjugirten Leiter unabhängig ist, letztere also alle möglichen Werthe annehmen können, ohne dass dadurch I_0 beeinflusst wird. Ebenso ist i_0 von E_0 und W_0 unabhängig. Man übersieht ferner leicht, dass, wenn umgekehrt I_0 von e_0 und w_0, respective i_0 von E_0 und W_0 unabhängig sein soll, hierfür nothwendig und hinreichend ist, dass die Gleichung

$$w_2 W_2 - w_1 W_1 = 0$$

erfüllt ist. Zugleich ergiebt sich, da N für alle Ausdrücke $I_0\, i_0\, I_1\, i_1 \ldots$ denselben Werth besitzt, wenn $w_2 W_2 - w_1 W_1 = 0$ ist, die Beziehung

$$\frac{w_0(W_1 + W_2) + W_2(W_1 + w_2)}{W_1}[w_2(W_1 + W_2) + W_0(W_1 + w_2)]$$

$$= \frac{W_0(w_1 + W_2) + W_2(w_1 + w_2)}{w_1}[w_2(w_1 + W_2) + w_0(w_1 + w_2)]$$

Selbstverständlich erhält man entsprechende Gleichungen für die beiden anderen Paare von conjugirten Leitern. Man hat in den Gleichungen (3) und (4) nur die Indices cyclisch zu vertauschen. Sie gelten, wenn die Bedingungsgleichungen

$$w_0 W_0 - w_2 W_2 = 0 \text{ oder } w_1 W_1 - w_0 W_0 = 0$$

erfüllt sind.

Die angestellten Betrachtungen finden, wie Herr Fröhlich bereits hervorgehoben hat, in solchen Fällen eine wichtige Anwendung, wo die bei Widerstandsvergleichungen benutzte Brücke aus verschiedenen Metallen zusammengesetzt ist, an deren Berührungspunkten in Folge ungleicher Temperaturen thermoelektrische Kräfte auftreten. Man hat alsdann (Fig. 2) dem Gleitcontact A eine solche Lage zu ertheilen, bei welcher eine Aenderung der elektromotorischen Kraft oder des Widerstandes in einem der conjugirten Leiter keine Intensitätsänderung in dem anderen conjugirten Leiter zur Folge hat. Dann gilt die Gleichung

$$w_2 W_2 = w_1 W_1.$$

Ist nur in einem der conjugirten Leiter eine elektromotorische Kraft enthalten, während alle übrigen Leiter von elektromotorischen Kräften frei sind, so besitzt jene constante Intensität im anderen conjugirten Leiter den Werth Null *).

Die Kenntniss der Intensität in den einzelnen Leitern kann dazu benutzt werden, die meisten der bekannten Methoden, Widerstände und elektromotorische Kräfte zu bestimmen, als specielle Fälle der Wheatstone'schen Brücke zu behandeln. So ergiebt sich z. B. die Poggendorff'sche Methode für die Vergleichung elektromotorischer Kräfte, wenn man aus Gleichung (2) durch Vertauschung der Indices den Ausdruck für i_2 herstellt und sodann $e_0 = E_0 = E_1 = E_2 = 0$, $W_0 = \infty$ setzt. Man erhält dann

$$i_2 = \frac{(W_2 + w_0 + w_1)\, e_2 - w_0\, e_1}{w_0\,(w_1 + w_2 + W_1 + W_2) + (w_1 + W_2)\,(W_1 + w_2)}$$

folglich, wenn w_0 so verändert wird, dass $i_2 = 0$ ist,

$$\frac{e_2}{e_1} = \frac{w_0}{W_2 + w_0 + w_1}.$$

Ebenso erhält man die abgeänderte Poggendorff'sche Methode von Dubois Raymond, wenn man aus Gleichung (2) den Werth i_1 ableitet und sodann $e_0 = e_2 = E_1 = E_2 = 0$ und $w_2 = \infty$ setzt,

$$i_1 = \frac{(W_0 + W_1 + W_2)\, e_1 - W_2\, E_0}{W_2\,(w_0 + W_0 + w_1 + W_1) + (w_0 + w_1)\,(W_0 + W_1)}.$$

Folglich, wenn man durch Verschiebung des Gleitcontactes A, Fig. 2, $i_1 = 0$ macht:

$$\frac{e_1}{E_0} = \frac{W_2}{W_0 + W_1 + W_2}.$$

Die Methode von Mance ergiebt sich unmittelbar, wenn man das Element, dessen Widerstand bestimmt werden soll, in den Leiter CD, Fig. 2, einschaltet, während die übrigen Leiter keine elektromotorische Kraft enthalten, und sodann dem Gleitcontact A eine solche Lage ertheilt, bei welcher die Unterbrechung oder der Schluss des Leiters AD keinen Einfluss auf I_0 äussern. Man hat alsdann

$$w_1 = \frac{W_2}{W_1}\, w_2 \quad I_0 = -\frac{W_1\, e_1}{w_2\,(W_1 + W_2) + W_0\,(W_1 + w_2)}.$$

*) In Bezug auf die zweckmässigste Wahl der Widerstände bei einer Widerstandsvergleichung siehe H. Weber, Wiedemann's Annalen, Bd. 30, S. 638.

Beim Schliessen und Oeffnen des Leiters AD ändert sich aber im Allgemeinen die Intensität i_1 und damit der Widerstand und die elektromotorische Kraft des Elementes, wodurch die Methode ungenau wird. Man kann, wie Herr Fröhlich vorschlägt, in den Zweig CB Elemente einschalten und dadurch bewirken, dass der Strom i_1 bei Schluss und Oeffnung von AD nur geringe Aenderungen erfährt. Man kann aber auch statt dessen eine elektromotorische Kraft e_0 in den Leiter AD einfügen von solcher Grösse, dass bei Schluss von AD i_1 ungeändert bleibt. Durch das Einfügen der elektromotorischen Kraft e_0 erfährt die Intensität I_0 in dem conjugirten Leiter keine Aenderung. Aus der Bedingung, dass i_1 für $w_0 = w_0$ und $w_0 = \infty$ denselben Werth behalten soll, während dabei die Bedingung $w_2 W_2 = w_1 W_1$ erfüllt ist, ergiebt sich dann, dass

$$e_0 = \frac{W_1}{W_1 + W_2} e_1 \text{ oder } e_0 = \frac{w_2}{w_1 + w_2} e_1$$

zu wählen ist. Da e_0 sich nicht stetig verändern kann, sondern einen gegebenen Werth besitzt, so kann man auch von vornherein den Widerstand w_2 so wählen, dass

$$w_2 = \frac{e_0}{e_1 - e_0} w_1$$

wird. Sind hiernach Näherungswerthe von e_1 e_0 und w_1 bekannt, so erreicht man durch geeignete Wahl von w_2, dass i_1 bei Schluss und Oeffnung von AD nahezu constant ist. Es muss nothwendig e_0 kleiner als e_1 genommen werden, für die Messung ist der Werth $e_0 = \frac{1}{2} e_1$ am günstigsten. Der Werth, welchen man für die elektromotorische Kraft e_1 des Elementes findet, ist dann die elektromotorische Kraft, welche dem Elemente zukommt, wenn durch dasselbe der Strom

$$i_1 = \frac{(W_0 + W_1 + W_2) e_1 w_1}{[W_0 (w_1 + W_2) + W_2 (w_1 + w_2)](w_1 + w_2)}$$

hindurchgeht.

Die letzte Anwendung der entwickelten Formeln bilde die Bestimmung des Potentials einer Rolle auf sich selbst nach Maxwell's Methode. Es sei die Rolle in den Leiter CD, Fig. 2, das Galvanometer in den Leiter AD und das Element in den Leiter CB eingeschaltet, während alle übrigen Leiter inductionslos und von elektromotorischen Kräften frei vorausgesetzt werden. Wird das Element plötzlich geschlossen oder geöffnet, so entstehen in den Zweigen CD und AD innerhalb der Zeiteinheit die elektromotorischen Kräfte

$$e_1 = -p_1 \frac{d i_1}{dt} \qquad e_0 = -p_0 \frac{d i_0}{dt},$$

wo p_0 und p_1 die Potentiale des Galvanometers und der Rolle auf sich selbst bedeuten. Man giebt nun zunächst dem Gleitcontact A eine solche Lage, dass bei dauerndem Stromschluss im Zweige CB $i_0 = 0$ also $w_1 W_1 = w_2 W_2$ wird. Haben W_1 und W_2 dieser Bedingung gemässe Werthe erhalten, so gilt während der Zeit dt nach plötzlichem Stromschluss oder nach plötzlicher Stromunterbrechung im Zweige CB nach Gleichung (4) die Gleichung

$$i_0\, dt = \frac{(w_1 + w_2)\, e_0\, dt - w_2\, e_1\, dt}{w_2 (w_1 + W_2) + w_0 (w_1 + w_2)}.$$

Folglich findet man für den Integralstrom in dem Leiter AD wenn τ die Zeitdauer der inducirten Ströme bedeutet,

$$\int_0^\tau i_0\, dt = \frac{(w_1 + w_2) \int_0^\tau e_0\, dt - w_2 \int_0^\tau e_1\, dt}{w_2 (w_1 + W_2) + w_0 (w_1 + w_2)}.$$

Es ist aber

$$\int_0^\tau e_0\, dt = -p_0 \left[i_0\right]_0^\tau \qquad \int_0^\tau e_1\, dt = -p_1 \left[i_1\right]_0^\tau$$

Bezeichnet j_1 die Intensität in dem Leiter CD bei d a u e r n d e m Stromschluss, so ist

bei plötzlichem Stromschluss:

$$\left[i_0\right]_0 = 0 \; \left[i_0\right]_\tau = 0 \; \left[i_1\right]_0 = 0 \; \left[i_1\right]_\tau = j_1,$$

bei plötzlicher Stomunterbrechung

$$\left[i_0\right]_0 = 0 \; \left[i_0\right]_\tau = 0 \; \left[i_1\right]_0 = j_1 \; \left[i_1\right]_\tau = 0,$$

folglich hat man

im ersten Falle $\int_0^\tau e_0\, dt = 0 \qquad \int_0^\tau e_1\, dt = -p_1 j_1,$

im zweiten Falle $\int_0^\tau e_0\, dt = 0 \qquad \int_0^\tau e_1\, dt = +p_1 j_1,$

und man erhält

$$\int_0^\tau i_0\, dt = \pm p_1 \frac{w_2 j_1}{w_2 (w_1 + W_2) + w_0 (w_1 + w_2)},$$

wo das obere Zeichen für den Stromschluss, das untere für die Stromunterbrechung zu nehmen ist. Aus Gleichung (2) ergiebt sich nun durch Vertauschung der Indices, indem man hierauf $E_1 = E_2 = e_0 = e_1 = e_2 = 0$ setzt,

$$j_1 = -\frac{W_1(w_0 + W_2) + W_2(w_0 + w_2)}{N} \cdot E_0.$$

Hierfür kann man auch schreiben, da $w_1 W_1 = w_2 W_2$ ist,

$$j_1 = -\frac{W_1}{w_2} \cdot \frac{w_2(w_1 + W_2) + w_0(w_1 + w_2)}{N} \cdot E_0.$$

Mithin erhält man schliesslich

$$\int_0^\tau i_0\, dt = \mp p_1 \frac{W_1}{N} \cdot E_0,$$

wo N, da $w_1 W_1 = w_2 W_2$ ist, den Werth

$$N = \frac{w_0(W_1 + W_2) + W_2(W_1 + w_2)}{W_1} [w_2(W_1 + W_2) + W_0(W_1 + w_2)]$$

besitzt. Es lässt sich der Werth des Integrales mit Hülfe der Rückwerfungsmethode bestimmen und mit Hülfe der obigen Gleichung der Werth von p_1 finden *).

---

*) Weiteres siehe H. Weber, der Rotationsinductor. Leipzig, B. G. Teubner 1882, S. 55.

Braunschweig, im Juli 1887.